

**ANNALES** DE L'INSTITUT TECHNIQUE  
DU BATIMENT ET DES TRAVAUX PUBLICS

N° 357 JANVIER 1978

SERIE : THEORIES ET METHODES  
DE CALCUL

ISSN 0020-2568

N° 212

# **CALCUL STATIQUE DES SYSTEMES DE CONTREVENTEMENT TRIDIMENSIONNELS IRRÉGULIERS PAR LA MÉTHODE DES MATRICES-TRANSFERT**

par

**Michel HENIN**

Ingénieur civil de l'Ecole Nationale  
des Ponts et Chaussées  
Docteur-Ingénieur  
Ingénieur au Bureau Veritas

# CALCUL STATIQUE DES SYSTÈMES DE CONTREVENTEMENT TRIDIMENSIONNELS IRRÉGULIERS PAR LA MÉTHODE DES MATRICES-TRANSFERT (\*)

par Michel HENIN

## INTRODUCTION

La plupart des immeubles élancés construits actuellement sont contreventés par des murs, des voiles ou des noyaux. Le calcul statique de telles structures, soumises à des charges de vent, a été abordé il y a une vingtaine d'années et plusieurs méthodes sont aujourd'hui à la disposition des ingénieurs.

Les méthodes dites continues correspondent à la généralisation de la méthode de M. Albigès et J. Goulet [2] : chaque file de linteaux est remplacée par un milieu continu équivalent travaillant au cisaillement. Après un premier calcul, à chacun des refends ajourés est associé un « refend équivalent » ayant sensiblement même comportement.

L'ensemble du contreventement est alors traité comme un système de consoles travaillant conjointement en flexion et torsion.

Ces méthodes s'appliquent mal aux systèmes de contreventement présentant des discontinuités de section ou une répartition irrégulière de linteaux. Elles négligent de plus le gauchissement propre des voiles, qui peut dans certains cas jouer un rôle important (noyaux).

Les méthodes discontinues permettent de calculer les systèmes de contreventement comme des systèmes tridimensionnels de poutres (voiles en tronçons de un étage + linteaux). Elles sont assez lourdes et peu économiques en temps-machine, difficiles à mettre en données et négligent, elles-aussi, le gauchissement propre des voiles.

Le but de cette étude est de présenter une méthode générale de calcul par ordinateur des contreventements tridimensionnels constitués de voiles reliés par des linteaux.

Cette méthode autorise les discontinuités de section (avec changement de ligne moyenne des voiles et éventuellement disparition de certains voiles dans les étages supérieurs), les répartitions irrégulières de linteaux et la présence de fondations élastiques. Elle tient compte du gauchissement propre des voiles et de leurs déformations d'effort normal.

Elle conduit, en outre, à des calculs économiques en temps-machine et occupation-mémoire.

### Hypothèses fondamentales

*Hypothèse 1* : Les calculs se font dans le domaine élastique linéaire.

*Hypothèse 2* : Le fonctionnement des voiles en flexion, torsion et compression-traction est régi par la théorie usuelle des poutres, sans distorsion, généralisée par Vlassov [7].

*Hypothèse 3* : Les planchers sont infiniment souples hors de leur plan, et indéformables dans leur plan. Cette indéformabilité transversale des sections est étendue aux niveaux entre planchers.

### Principe de la méthode

Elle utilise la technique des matrices transfert. Le vecteur-état considéré comporte un certain nombre de paramètres décrivant le comportement en flexion, torsion gauchie et compression-traction de la section entière du contreventement, à un niveau donné. Une matrice transfert est associée à chaque type de singularité (niveau à linteaux, discontinuité de section, fondations élastiques) et aux « tranches » du système de contreventement comprises entre deux singularités successives.

Le premier chapitre est consacré à la construction de la matrice transfert d'un tronçon régulier de système de contreventement, sans linteaux. Le second chapitre étudie les matrices transfert associées aux trois types de singularités indiqués ci-dessus. Le troisième chapitre expose l'application au calcul pratique des systèmes de contreventement. Le quatrième chapitre présente deux exemples de calcul. Une méthode approchée, permettant la prise en compte des portiques multitravées réguliers non symétriques, est exposée en annexes.

---

(\*) Cet article présente l'essentiel de la thèse de Docteur-Ingénieur soutenue par l'auteur, le 8 août 1976, à l'Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris VI.

$T_y(z)$  : homologue de  $T_x(z)$  suivant  $\overrightarrow{Cy}$ .

$M_x(z)$  : moment de flexion d'axe  $\overrightarrow{Cx}$ , c'est-à-dire composante suivant  $\overrightarrow{Cx}$  de la part de moment exercée par ( $t > z$ ) sur ( $t \leq z$ ) et effectivement reprise en flexion par la structure (par opposition à la part de moment reprise en compression-traction dans les voiles); appliqué en C.

$M_y(z)$  : homologue de  $M_x(z)$  pour  $\overrightarrow{Cy}$ .

$N_j(z)$  : effort normal dans le voile  $j$ , c'est-à-dire résultante des efforts longitudinaux exercés par la partie ( $t > z$ ) du voile  $j$  sur la partie ( $t \leq z$ ); appliqué en  $G_j$ .

$H(z)$  : moment de torsion exercé par ( $t > z$ ) sur ( $t \leq z$ ); appliqué en C.

$B(z)$  : bimoment exercé par ( $t > z$ ) sur ( $t \leq z$ ).

Les déplacements sont définis de la façon suivante :

$v_x(z)$  : déplacement horizontal suivant  $\overrightarrow{Cx}$  du centre de flexion C de la section de cote  $z$ .

$v_y(z)$  : homologue de  $v_x(z)$  pour  $\overrightarrow{Cy}$ .

$\theta(z)$  : angle de torsion autour de C de la section de cote  $z$ .

$v'_x(z), v'_y(z), \theta'(z)$  : dérivées par rapport à  $z$  de  $v_x(z), v_y(z)$  et  $\theta(z)$ .

$u_j(z, M)$  : déplacement longitudinal à la cote  $z$  d'un point M du voile  $j$ .

$u_j(z)$  : déplacement longitudinal d'ensemble de la section transversale du voile  $j$  à la cote  $z$  ( $u_j(z, M)$  est la somme de  $u_j(z)$  et des déplacements dus à la flexion et au gauchissement).

Les angles sont comptés positivement dans le sens direct, les déplacements dans le sens des axes qui les portent.

L'hypothèse d'indéformabilité transversale des sections fait que chaque section du tronçon étudié ne possède horizontalement que trois degrés de liberté. Aussi pourrions-nous caractériser le déplacement horizontal de toute section par la donnée des deux flèches horizontales principales de son centre de flexion C et de l'angle de rotation autour de celui-ci. Les planchers étant supposés infiniment souples hors de leur plan, chacun des voiles travaille indépendamment des autres en compression-traction (ce ne sera plus le cas lorsque interviendront les linteaux).

De ce qui précède, nous déduisons que l'étude d'un tronçon régulier de contreventement sans linteaux peut se faire en quatre parties indépendantes : étude de la flexion suivant ( $Cxz$ ), de la flexion suivant ( $Cyz$ ), de la torsion autour de  $\overrightarrow{Cz}$  et de la compression simple dans chaque voile.

## 1.2. Sous-matrices - transfert de flexion

### 1.2.1. Flexion dans le plan principal $Cxz$

Equations d'équilibre :

$$\begin{cases} \frac{dT_x}{dz}(z) = -q_x(z) \\ \frac{dM_y}{dz}(z) = -T_x(z) - \gamma_y(z) \end{cases}$$

Théorie des poutres sans distorsion :  $\frac{d^2 v_x}{dz^2}(z) = + \frac{M_y}{EI_{xx}}(z)$  (élasticité linéaire).

Par intégrations successives on obtient :  $T_x(z), M_y(z), v'_x(z)$  et  $v_x(z)$  en fonction de  $T_x(0), M_y(0), v'_x(0), v_x(0)$  et d'intégrales d'ordre 1, 2, 3 ou 4 de  $q_x(z)$  et  $\gamma_y(z)$ . Soit, noté matriciellement :

$$\begin{bmatrix} v_x(z) \\ v'_x(z) \\ M_y(z) \\ T_x(z) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z & \frac{z^2}{2EI_{xx}} & -\frac{z^3}{6EI_{xx}} & \bar{v}_x(z) \\ 0 & 1 & \frac{z}{EI_{xx}} & -\frac{z^2}{2EI_{xx}} & \bar{v}'_x(z) \\ 0 & 0 & 1 & -z & \bar{M}_y(z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{T}_x(z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_x(0) \\ v'_x(0) \\ M_y(0) \\ T_x(0) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \bar{T}_x(z) &= - \int_0^z q_x(t) dt \\ \bar{M}_y(z) &= - \int_0^z [\bar{T}_x(t) + \gamma_y(t)] dt \end{aligned}$$

Par dérivations de  $\bar{\theta}(z)$  nous introduisons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\theta}'(z) = \frac{d\bar{\theta}}{dz}(z) \\ \bar{H}(z) = GJ_d \frac{d\bar{\theta}}{dz}(z) - EJ_\omega \frac{d^3\bar{\theta}}{dz^3}(z) \\ \bar{B}(z) = -EJ_\omega \frac{d^2\bar{\theta}}{dz^2}(z) \end{array} \right.$$

La solution générale de (1) sans second membre a pour expression :

$$\theta_0(z) = a_1 + a_2 z + a_3 \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + a_4 \operatorname{ch} \frac{k}{l} z$$

En utilisant les relations (2) et (3) nous pouvons écrire :

$$\theta(0) = \theta_0(0) = a_1 + a_4$$

$$\theta'(0) = \theta'_0(0) = a_2 + \frac{k}{l} a_3$$

$$B(0) = -EJ_\omega \cdot \theta''(0) = -EJ_\omega \cdot \theta''_0(0) = -GJ_d \cdot a_4$$

$$H(0) = GJ_d \cdot \theta'(0) - EJ_\omega \cdot \theta'''(0) = GJ_d \cdot \theta'_0(0) - EJ_\omega \cdot \theta'''_0(0) = GJ_d \cdot a_2$$

La résolution de ce système donne les expressions de  $a_1, a_2, a_3, a_4$  en fonction de  $\theta(0), \theta'(0), B(0)$  et  $H(0)$ .

Finalement, tous calculs faits, nous obtenons l'expression complète de  $\theta(z)$  :

$$\theta(z) = \theta(0) + \theta'(0) \cdot \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + \frac{B(0)}{GJ_d} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z\right) + \frac{H(0)}{GJ_d} \left(z - \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z\right) + \bar{\theta}(z)$$

$\theta'(z), B(z)$  et  $H(z)$  s'obtiennent par dérivations. D'où la relation matricielle :

$$\begin{bmatrix} \theta(z) \\ \theta'(z) \\ B(z) \\ H(z) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z & \left(1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z\right) / GJ_d & \left(z - \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z\right) / GJ_d & \bar{\theta}(z) \\ 0 & \operatorname{ch} \frac{k}{l} z & \left(-\frac{k}{l} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z\right) / GJ_d & \left(1 - \operatorname{ch} \frac{k}{l} z\right) / GJ_d & \bar{\theta}'(z) \\ 0 & \left(-\frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z\right) GJ_d & \operatorname{ch} \frac{k}{l} z & \frac{l}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} z & \bar{B}(z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{H}(z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta(0) \\ \theta'(0) \\ B(0) \\ H(0) \\ 1 \end{bmatrix}$$

#### 1.4. Sous-matrice - transfert de compression simple

Soient  $m$  le nombre de voiles et  $j$  l'un de ces voiles ( $1 \leq j \leq m$ ).

$$\text{Nous avons : } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dN_j}{dz}(z) = -p_j(z) \quad (\text{équilibre}) \\ \frac{du_j}{dz}(z) = \frac{N_j}{E_j S_j}(z) \quad (\text{élasticité linéaire}) \end{array} \right.$$

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_j(z) = N_j(0) - \int_0^z p_j(t) dt = N_j(0) + \bar{N}_j(z) \\ u_j(z) = u_j(0) + \frac{N_j(0)}{E_j S_j} z + \int_0^z \frac{\bar{N}_j(t)}{E_j S_j} dt = u_j(0) + \frac{N_j(0)}{E_j S_j} z + \bar{u}_j(z) \end{array} \right.$$

$S_j$  étant la surface du voile  $j$ .

Passage d'un tronçon régulier (0, z) :

$$\begin{bmatrix} v_x(z) \\ v'_x(z) \\ M_y(z) \\ T_x(z) \\ v_y(z) \\ v'_y(z) \\ M_x(z) \\ T_y(z) \\ 0(z) \\ 0'(z) \\ B(z) \\ H(z) \\ \vdots \\ u_j(z) \\ N_j(z) \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z & \frac{z^2}{2EI_{xx}} & -\frac{z^3}{6EI_{xx}} \\ 0 & 1 & \frac{z}{EI_{xx}} & -\frac{z^2}{2EI_{xx}} \\ 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & z & -\frac{z^2}{2EI_{yy}} & -\frac{z^3}{6EI_{yy}} \\ 0 & 1 & -\frac{z}{EI_{yy}} & -\frac{z^2}{2EI_{yy}} \\ 0 & 0 & 1 & +z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \bar{v}_x(z) \\ \bar{v}'_x(z) \\ \bar{M}_y(z) \\ \bar{T}_x(z) \\ \bar{v}_y(z) \\ \bar{v}'_y(z) \\ \bar{M}_x(z) \\ \bar{T}_y(z) \\ \bar{0}(z) \\ \bar{0}'(z) \\ \bar{B}(z) \\ \bar{H}(z) \\ \vdots \\ \bar{u}_j(z) \\ \bar{N}_j(z) \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x(0) \\ v'_x(0) \\ M_y(0) \\ T_x(0) \\ v_y(0) \\ v'_y(0) \\ M_x(0) \\ T_y(0) \\ 0(0) \\ 0'(0) \\ B(0) \\ H(0) \\ \vdots \\ u_j(0) \\ N_j(0) \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$
  

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \text{sh} \frac{k}{l} z & \left(1 - \text{ch} \frac{k}{l} z\right) / \text{GJ}_d & \text{GJ}_d \left(z - \frac{1}{k} \text{sh} \frac{k}{l} z\right) / \text{GJ}_d \\ 0 & \text{ch} \frac{k}{l} z & -\frac{1}{k} \text{sh} \frac{k}{l} z / \text{GJ}_d & \left(1 - \text{ch} \frac{k}{l} z\right) / \text{GJ}_d \\ 0 & -\text{GJ}_d \frac{1}{k} \text{sh} \frac{k}{l} z & \text{ch} \frac{k}{l} z & \frac{1}{k} \text{sh} \frac{k}{l} z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$1 \leq j \leq m$

δ) **Densité de moment  $\gamma_y(z)$  trapézoïdale sur une zone :**

L'expression de  $\gamma_y(z)$  est analogue à celle de  $q_x(z)$  trouvée dans le paragraphe précédent.

Nous aurons cette fois :

$$\bar{T}_x(z, t) = 0$$

$$\bar{M}_y(z, t) = -Y(z, t) \left[ \frac{\alpha}{2} \cdot (z^2 - t_i^2) + \beta \cdot (z - t_i) \right]$$

$$\bar{v}'_x(z, t) = -\frac{Y(z, t)}{EI_{xx}} \left[ \frac{\alpha}{6} \cdot (z^3 - t_i^3) - \frac{\alpha}{2} \cdot t_i^2 (z - t_i) + \frac{\beta}{2} \cdot (z - t_i)^2 \right]$$

$$\bar{v}_x(z, t) = -\frac{Y(z, t)}{EI_{xx}} \left[ \frac{\alpha}{24} \cdot (z^4 - t_i^4) - \frac{\alpha}{6} \cdot (z - t_i) \cdot t_i^3 - \frac{\alpha}{4} \cdot t_i^2 (z - t_i)^2 + \frac{\beta}{6} \cdot (z - t_i)^3 \right]$$

1.62. **Flexion dans le plan  $Cyz$**

Nous avons vu en 1.22 que les formules relatives à la flexion dans le plan  $C_{yz}$  diffèrent par quelques signes de leurs homologues dans le plan  $C_{xz}$ . Il en va donc de même pour les expressions des termes de charge, que le lecteur saura retrouver, s'il le désire, à partir des résultats ci-dessus.

1.63. **Termes de charge de torsion**

L'expression générale de  $\bar{\theta}(z)$  a été établie en 1.3 :

$$\bar{\theta}(z) = \frac{1}{GJ_d} \int_0^z \left[ \frac{l}{k} sh \frac{k}{l} (z - u) - (z - u) \right] \cdot \left[ m(u) + \frac{db}{dz}(u) \right] \cdot du$$

$\bar{\theta}'(z)$ ,  $\bar{B}(z)$  et  $\bar{H}(z)$  se déduisent de  $\bar{\theta}(z)$  par dérivation.

α) **Moment de torsion  $H_t$  concentré en  $t$  :**

$$m(z) = H_t \cdot \delta(z - t) \quad \text{et} \quad b(z) = 0$$

$$\text{Or, } \forall f(z) \text{ continue en } z, \int_0^z f(u) \cdot \delta(u - t) du = Y(z - t) f(t).$$

$$\text{D'où : } \left\{ \begin{array}{l} \bar{\theta}(z) = H_t \frac{Y(z - t)}{GJ_d} \left[ \frac{l}{k} sh \frac{k}{l} (z - t) - (z - t) \right] \\ \bar{\theta}'(z) = H_t \frac{Y(z - t)}{GJ_d} \left[ ch \frac{k}{l} (z - t) - 1 \right] \\ \bar{B}(z) = H_t Y(z - t) \left[ -\frac{l}{k} sh \frac{k}{l} (z - t) \right] \\ \bar{H}(z) = -H_t Y(z - t) \end{array} \right.$$

β) **Bimoment  $B_t$  concentré à la cote  $t$  :**

$$m(z) = 0 \quad \text{et} \quad b(z) = B_t \cdot \delta(z - t)$$

$$\text{D'où : } \bar{\theta}(z) = \frac{B_t}{GJ_d} \int_0^z \left[ \frac{l}{k} sh \frac{k}{l} (z - u) - (z - u) \right] \cdot \delta'(u - t) \cdot du$$

$\delta'(z - t)$  est la dérivée au sens des distributions de la fonction de Dirac  $\delta(z - t)$  et est caractérisée par  $\forall f(z)$  dérivable en  $t$  :

$$\begin{aligned} \int_0^z f(u) \cdot \delta'(u - t) du &= f(z) \cdot \delta(z - t) \Big|_0^z - \int_0^z f'(u) \cdot \delta(z - u) du \\ &= -f'(t) \cdot Y(z - t) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\theta}(z) = -\frac{B_t}{GJ_d} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{l}{k} sh \frac{k}{l} (z - u) - (z - u) \right)_{(u)} \cdot Y(z - t) \\ \quad = B_t \cdot \frac{Y(z - t)}{GJ_d} \left( ch \frac{k}{l} (z - t) - 1 \right) \\ \bar{\theta}'(z) = B_t \cdot \frac{Y(z - t)}{GJ_d} \left( sh \frac{k}{l} (z - t) \right) \\ \bar{B}(z) = -B_t \cdot Y(z - t) \left( ch \frac{k}{l} (z - t) \right) \\ \bar{H}(z) = 0 \end{array} \right.$$

## CHAPITRE II

### TRAITEMENT MATRICIEL DES SINGULARITES

#### 2.1. Matrice transfert de passage d'un niveau à linteaux

Soit  $t$  la cote d'un niveau à linteaux. Nous supposons pour le moment que ce niveau ne présente pas de discontinuités de section. Nous allons dans ce paragraphe introduire une matrice transfert de passage de niveau à linteaux,  $\mathcal{M}_L$ , reliant  $E(t^+)$  à  $E(t^-)$  :  $E(t^+) = \mathcal{M}_L \circ E(t^-)$ .

Soient :

- $k$  : indice d'un des linteaux du niveau de cote  $t$  ( $1 \leq k \leq n$ ,  $n$  étant le nombre de linteaux à ce niveau).
- $k_1$  et  $k_2$  : indices des deux voiles reliés par le linteau  $k$  (éventuellement,  $k_1 = k_2$ ). Par convention, l'encastrement sur  $k_1$  sera l'origine du linteau, celui sur  $k_2$  son extrémité.
- $G_{k1}$  et  $G_{k2}$  : centres de gravité des voiles  $k_1$  et  $k_2$ .
- $M_k$  : le point de milieu de travée du linteau  $k$ .
- $M_{k1}$  (ou  $M_{k2}$ ) : après coupure du linteau  $k$  en  $M_k$ , le point  $M_k$  considéré comme appartenant au voile  $k_1$  (ou  $k_2$ ).
- $R_k$  : raideur du linteau  $k$  (calculée éventuellement en tenant compte de la *distorsion*, ou à partir d'une portée augmentée fictivement d'une fraction de la hauteur du linteau, afin de tenir compte de façon approchée des *déformations localisées des encastremets*).

Dans la suite de ce paragraphe  $(x, y, \omega)$  seront des coordonnées généralisées principales relatives au tronçon dans lequel se trouve le niveau  $t$ .

Soit  $T_k$  l'effort tranchant dans le linteau  $k$ . Nous en fixons le signe en posant :

$$T_k = R_k [u(M_{k1}, t) - u(M_{k2}, t)]$$

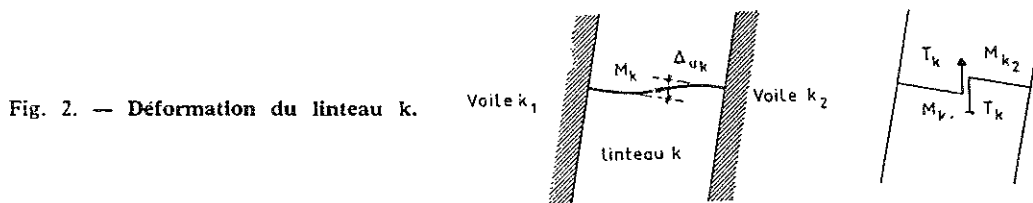


Fig. 2. — Déformation du linteau  $k$ .

$M_k$  étant point d'inflexion, une coupure en  $M_k$  ne libère que deux efforts verticaux :

$$\begin{cases} - T_k \cdot \vec{k} \text{ en } M_{k1} \\ + T_k \cdot \vec{k} \text{ en } M_{k2} \end{cases}$$

( $\vec{k}$  vecteur unitaire de  $\vec{Cz}$ , dirigé vers le haut).

L'action résistante du linteau se ramène donc à l'application à la section de cote  $t$  des efforts suivants :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Delta M_k} = - T_k \cdot \vec{k} \wedge \overrightarrow{M_{k1} G_{k1}} + T_k \cdot \vec{k} \wedge \overrightarrow{M_{k2} G_{k2}} = T_k \cdot \vec{k} \wedge \overrightarrow{G_{k1} G_{k2}} \\ \overrightarrow{\Delta B_k} = T_k \cdot [\omega(M_{k2}) - \omega(M_{k1})] \\ \overrightarrow{\Delta N_{k1}} = - T_k \cdot \vec{k} \text{ en } G_{k1} \\ \overrightarrow{\Delta N_{k2}} = + T_k \cdot \vec{k} \text{ en } G_{k2} \end{cases}$$

Nous en déduisons, en prenant en compte les  $n$  linteaux :

$$\begin{cases} M_x(t^+) = M_x(t^-) + \sum_k [y(G_{k2}) - y(G_{k1})] \cdot T_k \\ M_y(t^+) = M_y(t^-) - \sum_k [x(G_{k2}) - x(G_{k1})] \cdot T_k \\ B(t^+) = B(t^-) - \sum_k [\omega(M_{k2}) - \omega(M_{k1})] \cdot T_k \\ N_j(t^+) = N_j(t^-) + \sum_k \varepsilon_k^j \cdot T_k \end{cases}$$

(avec  $\varepsilon_k^j = +1$  (resp.  $-1$ ) si le linteau  $k$  a son origine (resp. extrémité) sur le voile  $j$ , et 0 dans les autres cas).

Tous calculs faits, on trouve :

$$\begin{cases} v_x(t^+) = + v_x(t^-) \cos \alpha + v_y(t^-) \sin \alpha + y_2(C_1) \cdot \theta(t^-) \\ v_y(t^+) = - v_x(t^-) \sin \alpha + v_y(t^-) \cos \alpha - x_2(C_1) \cdot \theta(t^-) \end{cases}$$

(formules analogues pour  $v'_x$  et  $v'_y$ ).

$$\alpha = \overrightarrow{(C_1 x_1, C_2 x_2)}$$

Transformation des  $u_j(z)$  :

Dans le cas général, il n'y a pas conservation, au passage de la cote  $t$ , du déplacement longitudinal d'ensemble  $u_j(z)$  du voile  $j$ .

Cette discontinuité de  $u_j(z)$  à la cote  $t$  correspond pour le voile  $j$  à un changement de position soit du centre de gravité, soit du point sectoriel initial principal. Pour traiter ce second cas, nous allons introduire, pour chaque voile  $j$ , un point particulier dit « point de référence du voile  $j$  », noté  $R_j$  et défini de la façon suivante :

$R_j$  est choisi parmi les points appartenant en projection à toutes les sections successives du voile  $j$ . On connaît son abscisse et son ordonnée dans le repère général (0 X Y Z), et son aire sectorielle principale dans chacun des tronçons du système de contreventement (fig. 3).

La continuité de la matière impose  $u_j(R_j, t^+) = u_j(R_j, t^-)$ . On peut montrer que cette condition assure la continuité de la matière pour tous les autres points du voile  $j$ .

$$\begin{aligned} u_j(R_j, t^+) &= u_j(t^+) - v'_x(t^+) \cdot [x_2(R_j) - x_2(G_{j2})] \\ &\quad - v'_y(t^+) \cdot [y_2(R_j) - y_2(G_{j2})] \\ &\quad - \theta'(t^+) \cdot \omega_2(R_j) \\ u_j(R_j, t^-) &= u_j(t^-) - v'_x(t^-) \cdot [x_1(R_j) - x_1(G_{j1})] \\ &\quad - v'_y(t^-) \cdot [y_1(R_j) - y_1(G_{j1})] \\ &\quad - \theta'(t^-) \cdot \omega_1(R_j) \end{aligned}$$

Après transformation,  $u_j(R_j, t^+) = u_j(R_j, t^-)$  conduit à :

$$\begin{aligned} u_j(t^+) &= u_j(t^-) - [x_1(G_{j2}) - x_1(G_{j1})] \cdot v'_x(t^-) \\ &\quad - [y_1(G_{j2}) - y_1(G_{j1})] \cdot v'_y(t^-) - \Omega_j \cdot \theta'(t^-) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \Omega_j &= \omega_1(R_j) - \omega_2(R_j) \\ &\quad + [y_1(C_2) - y_1(C_1)] \cdot [x_1(R_j) - x_1(G_{j2})] \\ &\quad - [x_1(C_2) - x_1(C_1)] \cdot [y_1(R_j) - y_1(G_{j2})] \end{aligned}$$

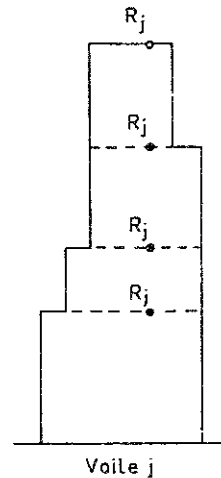


Fig. 3. — Définition du « point de référence du voile  $j$  »,  $R_j$ .

### 2.22. Transformation des efforts internes

Soient :

$S_{j1}$  (resp.  $S_{j2}$ ) la section du voile  $j$  pour  $z < t$  (resp.  $z > t$ ).

$\sigma_j(s)$  (resp.  $\tau_j(s)$ ) la contrainte normale (resp. le flux de cisaillement) appliquée par  $S_{j2}$  sur  $S_{j1}$ , au point  $M(s)$  de  $S_{j1} \cap S_{j2}$  ( $\sigma_j(s)$  et  $\tau_j(s)$  sont nuls en dehors de  $S_{j1} \cap S_{j2}$ ).

α) Efforts normaux :

$$N_j(t^+) = \int_{S_{j1} \cap S_{j2}} \sigma_j(s) \cdot dF = N_j(t^-)$$

β) Moments de flexion :

Les intégrations ci-dessous se font sur  $S_{j1} \cap S_{j2}$ .

Nous avons :

$$\begin{cases} M_x(t^+) = + \sum_j \int \sigma_j(s) \cdot [y_2(M) - y_2(G_{j2})] \cdot dF \\ M_y(t^+) = - \sum_j \int \sigma_j(s) \cdot [x_2(M) - x_2(G_{j2})] \cdot dF \end{cases}$$

(formules analogues pour  $M_x(t^-)$  et  $M_y(t^-)$ ).

Tenant compte de :

$$\begin{cases} x_2(M) = + x_1(M) \cos \alpha + y_1(M) \sin \alpha + x_2(C_1) \\ y_2(M) = - x_1(M) \sin \alpha + y_1(M) \cos \alpha + y_2(C_1) \end{cases}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} M_x(0) = + \sum_j \int \sigma(M) \cdot [y(M) - y(G_j)] \cdot dF \\ M_y(0) = - \sum_j \int \sigma(M) \cdot [x(M) - x(G_j)] \cdot dF \\ B(0) = + \sum_j \int \sigma(M) \cdot \omega(M) \cdot dF \\ N(0) = + \sum_j \int \sigma(M) \cdot dF \end{array} \right.$$

(les intégrales se font sur les semelles  $j$ ).

Comme il n'y a décollement en aucun point  $M$ , nous aurons en tout point :

$$\sigma(M) = k \cdot u(M)$$

avec :

$$u(M) = u_j(0) - v'_x(0) \cdot [x(M) - x(G_j)] - v'_y(0) \cdot [y(M) - y(G_j)] - \theta'(0) \cdot \omega(M)$$

Nous pouvons donc, dans chaque intégrale du système ci-dessus, remplacer  $\sigma(M)$  par l'expression développée de  $u(M)$  multipliée par  $k$ . Comme  $x$ ,  $y$  et  $\omega$  sont des coordonnées généralisées principales, toutes les intégrales de produits croisés sont nulles et il vient finalement après simplification :

$$\begin{array}{ll} M_x(0) = -k \cdot I_{yy} \cdot v'_y(0) & B(0) = -k \cdot J_\omega \cdot \theta'(0) \\ M_y(0) = +k \cdot I_{xx} \cdot v'_x(0) & N_j(0) = +k \cdot S_j \cdot u_j(0) \end{array}$$

Nous allons maintenant considérer que le véritable encastrement de la structure est un **encastrement rigide** situé juste au-dessous de la liaison élastique que nous venons d'étudier (fig. 4).

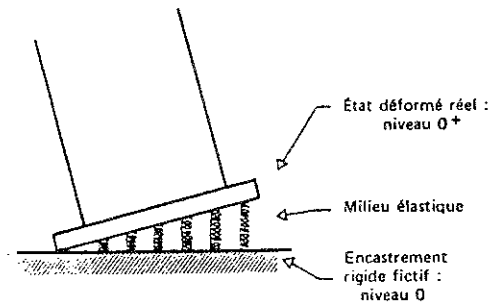


Fig. 4. — Définition de l'encastrement de la structure.

A l'encastrement rigide fictif on a bien sûr :

$$v'_x(0) = v'_y(0) = \theta'(0) = u_j(0) = 0$$

Par contre, après la liaison élastique, c'est-à-dire en  $0^+$  :

$$\begin{array}{ll} v'_x(0^+) = + M_y(0)/k \cdot I_{xx} & \theta'(0^+) = - B(0)/k \cdot J_\omega \\ v'_y(0^+) = - M_x(0)/k \cdot I_{yy} & u_j(0^+) = + N_j(0)/k \cdot S_j \end{array}$$

(en tenant compte de la continuité des efforts internes en  $z = 0$ ).

Tous les autres paramètres de  $E(z)$  n'étant pas modifiés lors du passage de la liaison élastique, nous déduisons des quatre relations ci-dessus l'expression de la matrice transfert de fondations élastiques.

*Remarque* : il est possible, grâce à un certain nombre d'astuces, de traiter des systèmes de fondations élastiques plus complexes que ceux définis par les trois hypothèses  $h_1$ ,  $h_2$  et  $h_3$ .

moments dans ces voiles suivant des directions quelconques :

$(C_j x_j, C_j y_j)$  : directions principales du voile  $j$ .

$(C_j XY)$  : repère quelconque.

$$\begin{cases} (M_x)_j = -E_j (I_{yy})_j \cdot v''_y(C_j) + E_j (I_{xy})_j \cdot v''_x(C_j) \\ (M_y)_j = +E_j (I_{xx})_j \cdot v''_x(C_j) - E_j (I_{xy})_j \cdot v''_y(C_j) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} (I_{xx})_j = I_{x_j x_j} \cdot \cos^2 \alpha + I_{y_j y_j} \cdot \sin^2 \alpha \\ (I_{yy})_j = I_{x_j x_j} \cdot \sin^2 \alpha + I_{y_j y_j} \cdot \cos^2 \alpha \\ (I_{xy})_j = \frac{\text{tg } 2 \alpha}{2} [(I_{yy})_j - (I_{xx})_j] \end{cases}$$

$(I_{x_j x_j}$  et  $I_{y_j y_j}$  sont les inerties principales du voile  $j$ ,  $\alpha = (C_j X, C_j X_j)$ ).

### Remarque 3 : Correction des moments

L'hypothèse d'indéformabilité transversale des sections du système de contreventement à toute cote  $z$  n'est qu'une approche de la réalité : les voiles ont, en fait, entre les planchers indéformables, de petits déplacements horizontaux relatifs, qui sont de légères ondulations autour de la déformée moyenne donnée par la méthode des matrices transfert. Les moments calculés à partir des dérivées secondes des dépla-

cements sont donc entachés d'une erreur systématique que l'on peut corriger de la façon suivante :

A chaque niveau d'étage (qui comporte généralement des linteaux), les sauts de moment sont calculés pour chaque voile à partir des efforts tranchants des linteaux adjacents. Ces sauts de moment corrigés sont alors centrés sur la valeur moyenne des moments calculés à partir des dérivées secondes et donnent ainsi les valeurs corrigées des moments au-dessus et au-dessous de l'étage (fig. 5).

La même remarque s'applique aux bimoments.

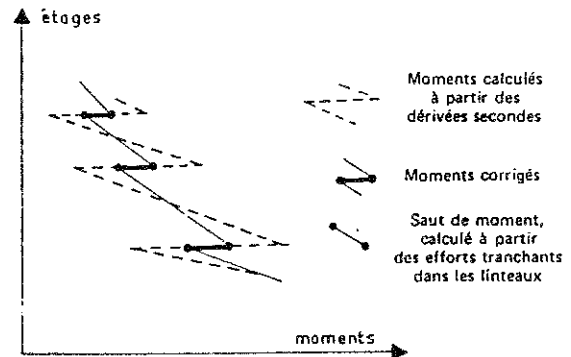


Fig. 6. — Correction des moments calculés à partir des dérivées secondes.

## CHAPITRE IV

### APPLICATIONS NUMERIQUES

#### 4.1. Premier exemple : immeuble régulier non symétrique

##### 4.1.1. Généralités

Nous entendons par immeuble régulier un immeuble dont le système de contreventement possède les mêmes caractéristiques géométriques et mécaniques à tous les étages.

Nous allons, sur cet exemple, comparer les résultats donnés par la méthode de calcul par matrices-transfert avec ceux fournis par trois méthodes permettant le calcul tridimensionnel des contreventements par refends à files d'ouvertures, à savoir :

- 1) Méthode de Coin, Collignon et Decauchy [4].
- 2) Méthode de Despeyroux et Guillot [5].
- 3) Méthode du portique équivalent [1].

Les deux premières méthodes correspondent à la généralisation de la méthode de M. Albiges et J. Goulet [2]. Afin de permettre le calcul tridimensionnel, elles remplacent toutes deux chaque plan de contreventement (refend à plusieurs files d'ouvertures) par un « refend équivalent » ayant, sous un chargement

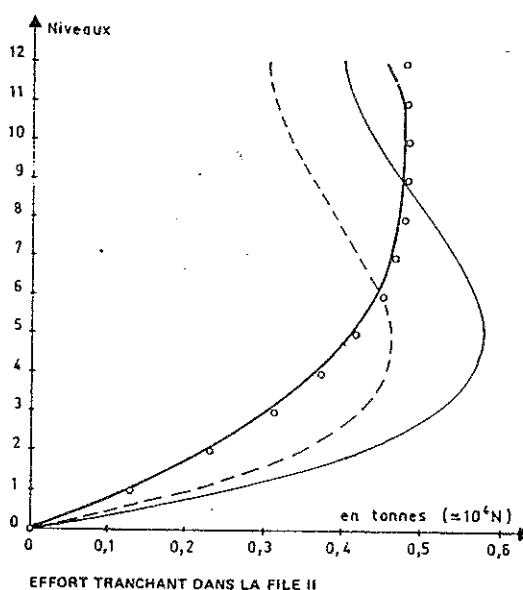
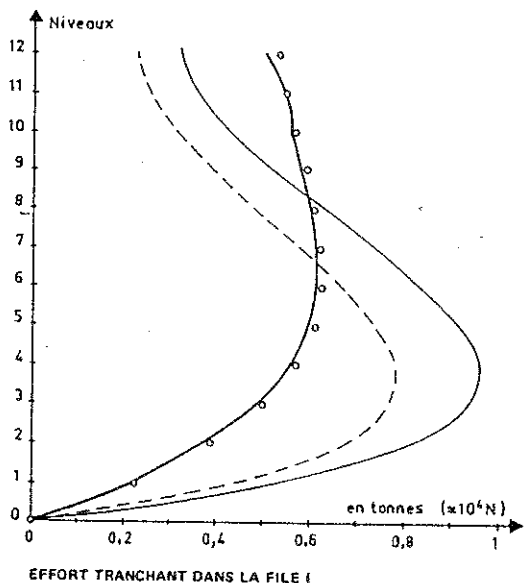
donné, même flèche au sommet. (V. Guillot impose l'égalité des flèches non pas au sommet, mais à un niveau inférieur optimum). Le calcul est mené matriciellement dans les deux cas, mais dans le premier cas, on aboutit à un système linéaire, alors que la seconde méthode conduit à un problème de valeurs propres.

Ces deux méthodes supposent impérativement que l'immeuble est régulier ou quasi régulier.

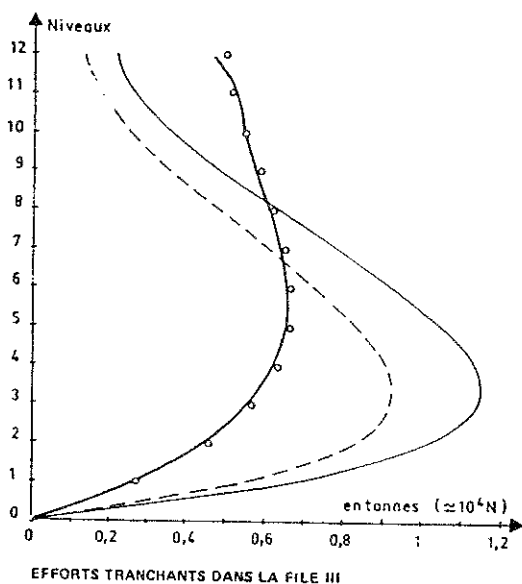
La méthode du portique équivalent consiste à représenter le contreventement par un système tridimensionnel de poutres (fig. 7) : les trumeaux et les linteaux sont modélisés par des barres verticales ou horizontales, coïncidant avec leurs fibres moyennes et ayant mêmes caractéristiques géométriques et mécaniques. Des goussets rigides relient les extrémités des linteaux aux fibres moyennes des trumeaux.

Cette méthode donne, dans le cadre de la théorie usuelle des poutres, des résultats que l'on peut considérer comme exacts (la distorsion des trumeaux étant négligée et les planchers étant supposés infiniment rigides dans leur plan). L'introduction de portiques dans le système de contreventement ne pose pas de problèmes.

○ Méthode des matrices transfert  
 - - - Méthode de Despeyroux et Guillot  
 — Méthode du portique équivalent  
 — Méthode de Coin, Collignon et Decauchy



○ Méthode des matrices transfert  
 - - - Méthode de Despeyroux et Guillot



— Méthode du portique équivalent  
 — Méthode de Coin, Collignon et Decauchy

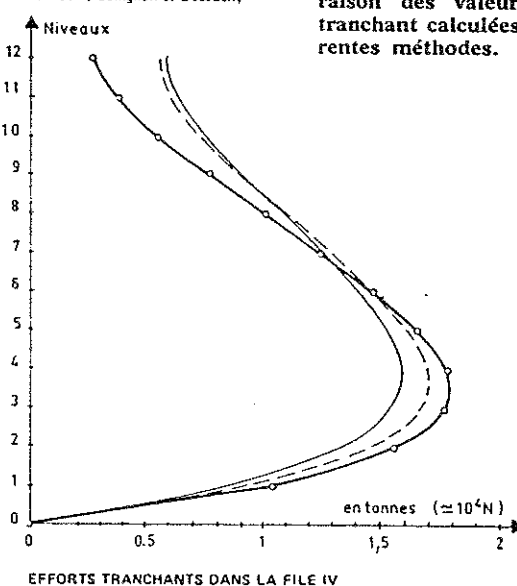
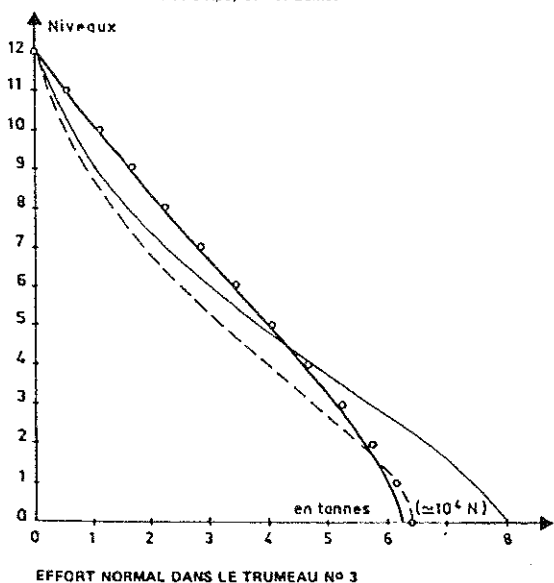


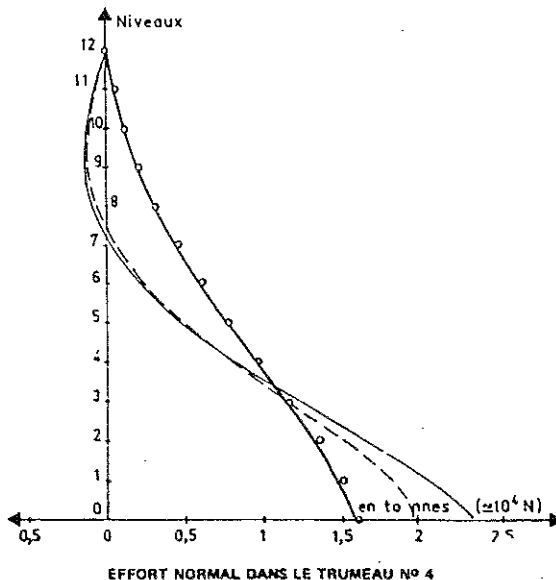
Fig. 9. — Exemple 1 : immeuble régulier non symétrique. Comparaison des valeurs de l'effort tranchant calculées par les différentes méthodes.

Fig. 10. — Exemple 1 : immeuble régulier non symétrique. Comparaison des valeurs de l'effort normal dans les trumeaux, calculées par les différentes méthodes.

○ Méthode des matrices transfert  
 - - - Méthode de Despeyroux et Guillot



— Méthode du portique équivalent  
 — Méthode de Coin, Collignon et Decauchy



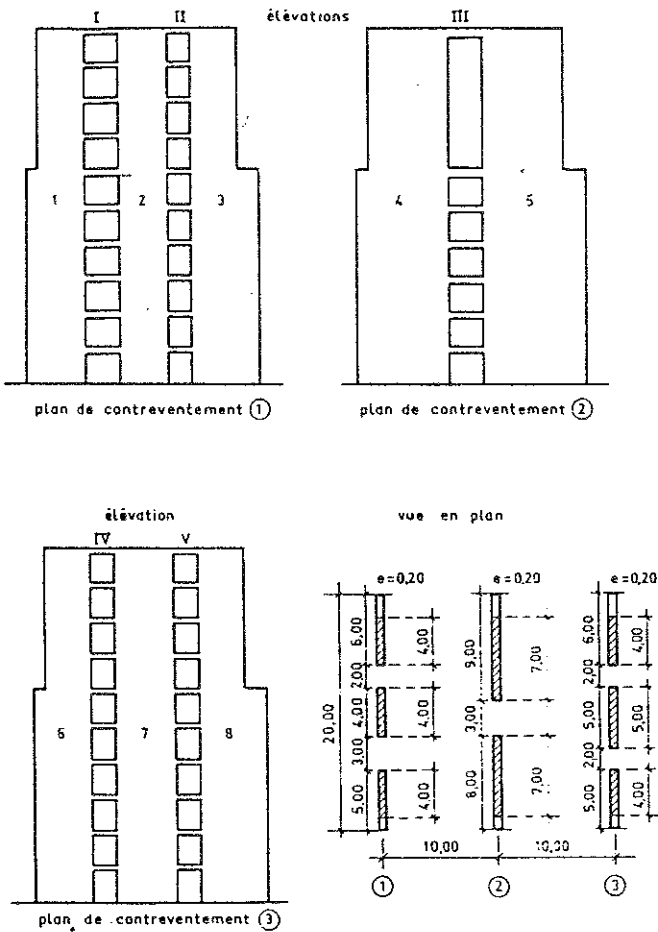


Fig. 13. — Immeuble présentant des discontinuités étudié dans l'exemple 2.

Files de linteaux	Etages 1 à 6		Etages 7 à 10	
	L (m)	I (m <sup>4</sup> )	L (m)	I (m <sup>4</sup> )
I	3.00	0.003	3.00	0.002
II	2.00	0.002	2.00	0.002
IV	2.00	0.002	2.00	0.002
V	2.00	0.002	2.00	0.002

File de linteaux III : L = 3.000 m  
 Etages 1 à 5 : I = 0.005 m<sup>4</sup>  
 Etage 6 : I = 0.010 m<sup>4</sup>  
 Etages 7 à 9 : Pas de linteaux  
 Etage 10 : I = 0.010 m<sup>4</sup>

**Chargement extérieur**

Charge trapézoïdale dans le plan moyen du plan de contreventement médian :

$q_0 = 6 t (\approx 6 \cdot 10^4 N)$  par mètre linéaire  
 $q_{30} = 12 t (\approx 12 \cdot 10^4 N)$  par mètre linéaire

**Fondations élastiques**

Après avoir étudié le cas où les trumeaux sont parfaitement encastés en pied, nous introduirons un système de fondation élastique : chaque trumeau sera fondé sur une semelle indépendante, de longueur égale à la largeur du trumeau et de 1 m de largeur.

Le coefficient de réaction du sol sera  $k = 5\,000 t/m^3$  ( $49 MN/m^3$ ).

**4.23. Comparaison des résultats**

Les courbes des figures 14 donnent, dans le cas des fondations rigides, puis dans le cas des fondations élastiques, les valeurs à chaque étage des quantités suivantes, calculées par la méthode des matrices transfert et la méthode du portique équivalent :

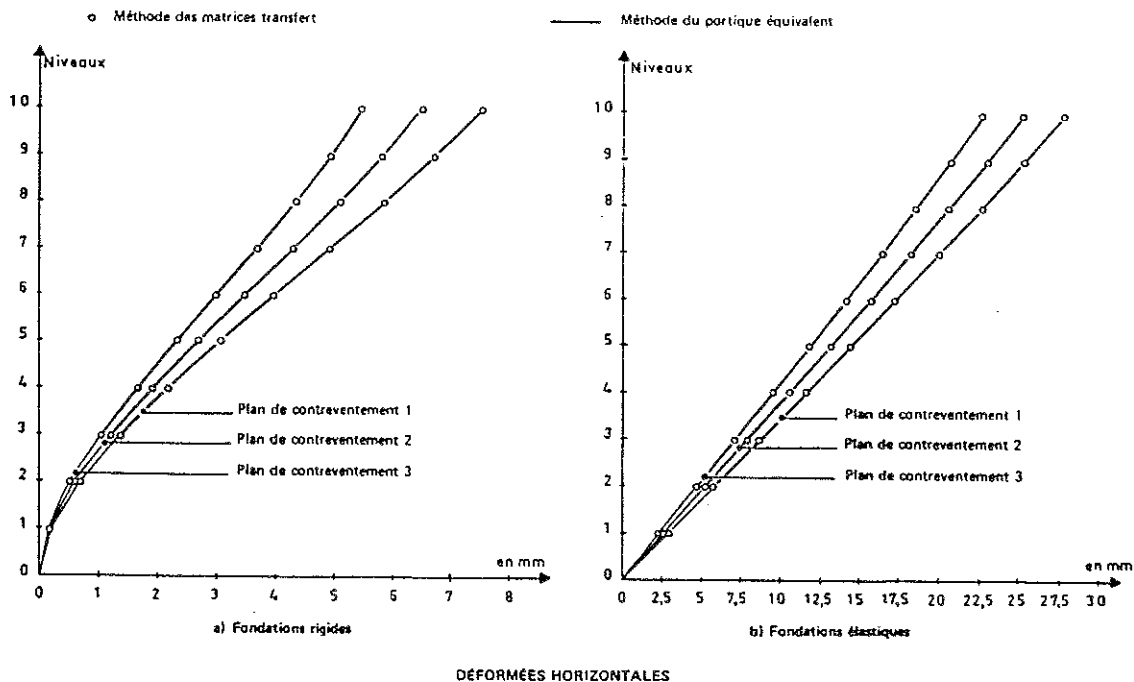
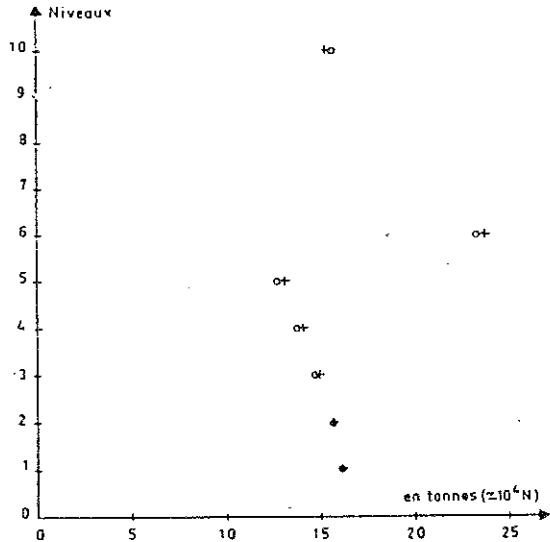


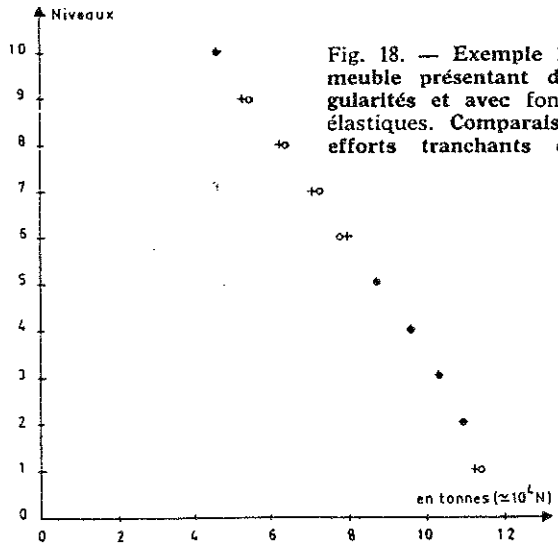
Fig. 14. — Exemple 2 : immeuble présentant des singularités. Comparaison des valeurs des déformations horizontales calculées par les deux méthodes (portique équivalent et matrices transfert).

o Méthode des matrices transfert



EFFORTS TRANCHANTS DANS LA FILE III

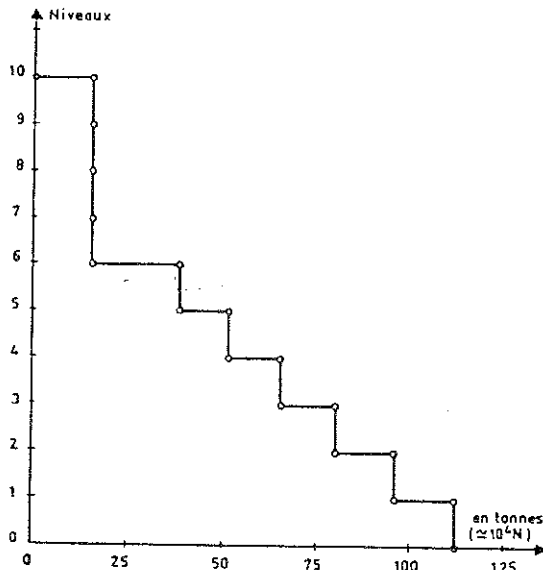
4. Méthode du portique équivalent



EFFORTS TRANCHANTS DANS LA FILE IV

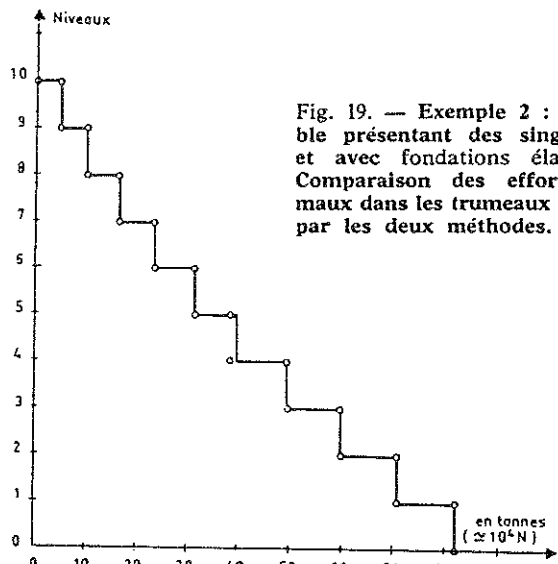
Fig. 18. — Exemple 2 : immeuble présentant des singularités et avec fondations élastiques. Comparaison des efforts tranchants calculés

o Méthode des matrices transfert



EFFORT NORMAL . TRUMEAU 4

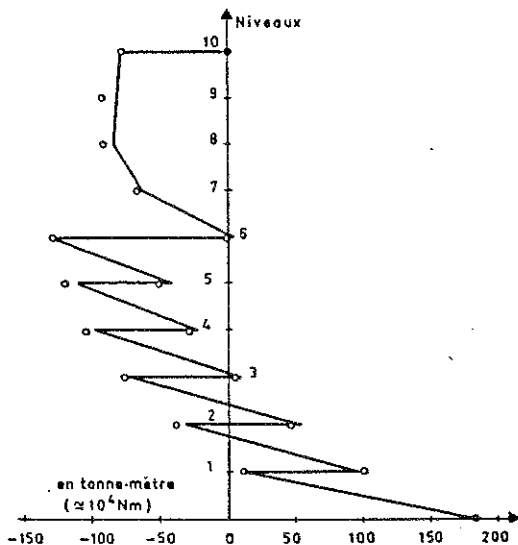
— Méthode du portique équivalent



EFFORT NORMAL . TRUMEAU 6

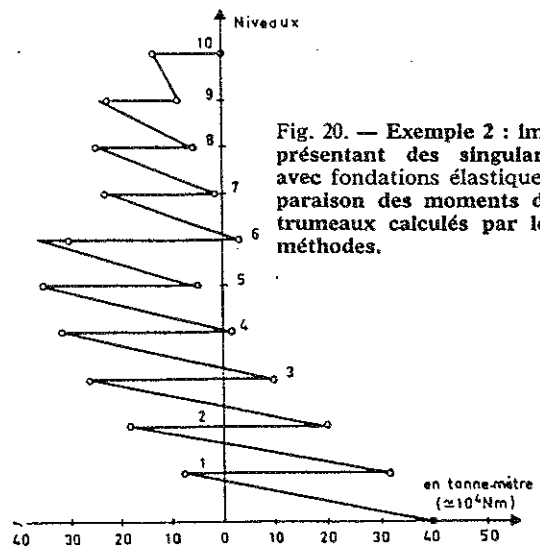
Fig. 19. — Exemple 2 : immeuble présentant des singularités et avec fondations élastiques. Comparaison des efforts normaux dans les trumeaux calculés par les deux méthodes.

o Méthode des matrices transfert; sauts de moment corrigés



MOMENTS DANS LE TRUMEAU 4

— Méthode du portique équivalent;



MOMENTS DANS LE TRUMEAU 6

Fig. 20. — Exemple 2 : immeuble présentant des singularités et avec fondations élastiques. Comparaison des moments dans les trumeaux calculés par les deux méthodes.

ANNEXE

PRISE EN COMPTE DES PORTIQUES REGULIERS

La méthode approchée exposée ci-après permet d'introduire dans un système de contreventement des portiques multitravées non symétriques, avec prise en compte des déformations d'effort normal dans les montants. Elle suppose que les caractéristiques des portiques ne varient pas avec la hauteur, ou tout au moins restent constantes par groupes d'étages (5 ou 6 minimum).

A 1. Portiques symétriques à une travée

Ce cas particulier va nous permettre de donner le principe de la méthode.

Considérons le portique symétrique de la figure 21, rapporté au repère  $(0 \xi z)$ .

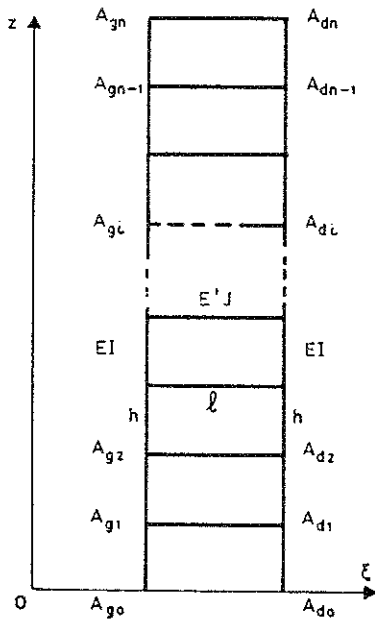


Fig. 21. — Portique symétrique à une travée.

Après avoir réalisé une coupure au milieu  $M_i$  de chaque traverse  $i$ , donnons à ce portique une déformée horizontale  $\xi_o(z)$  (fig. 22 a), obtenue en imposant que chaque nœud  $A_{gi}$  prenne une certaine flèche  $\xi_i$  (la flèche des  $A_{di}$  est aussi  $\xi_i$ ).

Refermons maintenant toutes les coupures des milieux de traverse  $M_i$ , tout en imposant aux  $A_{gi}$  et  $A_{di}$  de garder leur flèche horizontale  $\xi_i$  (fig. 22 b). Cette fermeture des coupures se fait en appliquant aux nœuds  $M_i$  les deux efforts verticaux opposés d'intensité  $T_i$  qui conviennent (les  $M_i$  étant point d'inflexion, il n'y a pas de moments hyperstatiques libérés).

Notons  $\xi_1(z)$ , la nouvelle déformée des montants et posons  $\Delta \xi(z) = \xi_1(z) - \xi_o(z)$ .

On a pour  $i = 1$  et  $i = n$ ,  $\Delta \xi(z_i) = 0$ .

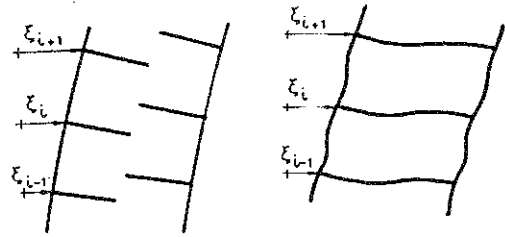


Fig. 22. — Déformée du portique : a) après coupure au milieu des travées ; b) après avoir refermé ces coupures.

$\Delta \xi(z)$  s'annule en outre une fois entre chaque étage et possède par conséquent un point d'inflexion entre chaque étage.

Nous supposons que ce point d'inflexion et ce point d'annulation sont confondus et se situent exactement à mi-étage.

Si  $EI$  est la rigidité des montants, la variation de moment dans ces montants, due à la fermeture des coupures est :

$$\Delta M(z) = -EI \cdot \Delta \xi''(z)$$

Le point à mi-étage est donc point de variation de moment nulle ( $\neq$  point de moment nul).

On en déduit que pour la fermeture des coupures, le portique peut être « approximé » par la structure de la figure 23.

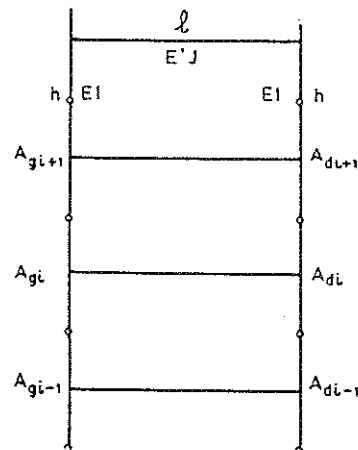


Fig. 23. — Structure correspondant au portique coupures refermées.

Isolons l'élément de l'étage  $i$  (après fermeture des coupures) (fig. 24).  $\Delta_i$  étant défini sur la figure 24, un calcul simple montre que,  $T_i$  étant l'effort tranchant dans la traverse :

$$T_i = \left( \frac{h^2}{24 EI} + \frac{l}{12 E'J} \right)^{-1} \cdot \Delta_i = K \cdot \Delta_i$$

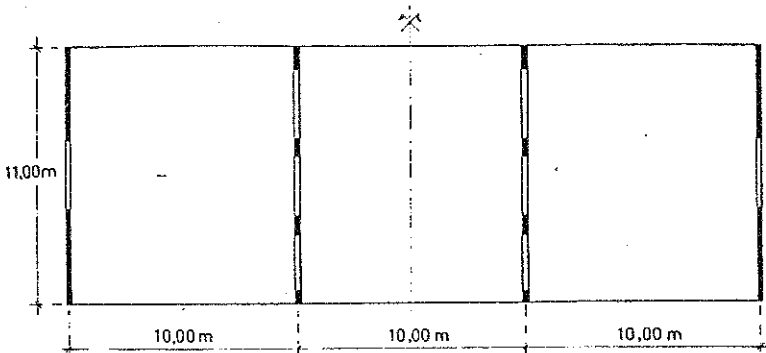


Fig. 27. — Exemple 3 : immeuble symétrique comportant des portiques. Vue en plan.

de barres, soit par la technique des matrices transfert appliquées aux poutres continues (voir [3], p. 39 à 47). La programmation de cette application est simple.

Nous obtenons ainsi une généralisation des formules du paragraphe 2.1., établies pour la prise en compte des linteaux. Nous ne donnerons pas les formules correspondant aux sauts de moments et de bimoment, qui se déduisent facilement de celles du paragraphe 2.1. D'un point de vue pratique, comme pour le cas des portiques symétriques à une travée (voir A 1), nous introduirons, pour le calcul, un voile par montant. Les efforts tranchants dans les traverses ( $T_k$ ) pourront être calculés directement par l'ordinateur au moment de la sortie des résultats. Le calcul des sauts de moment dans les montants du portique suppose que l'on en connaisse les coefficients d'influence, vis-à-vis de  $\omega$  et des  $u_j$ .

### A 3. Exemple 3 : Prise en compte de portiques multitravées non symétriques

Cet exemple constitue un test de la méthode approchée de prise en compte des portiques multitravée non symétriques exposée en A 2. Nous comparerons les résultats obtenus par cette méthode avec ceux fournis par la méthode du portique équivalent (voir paragraphe 4.11.).

#### A 3.1. Description sommaire de l'immeuble

- Quatre plans de contreventements. L'immeuble est symétrique.
- Dix étages de 3 m.
- Fondations rigides.
- Pression du vent uniforme :  $0.1 \text{ t/m}^2$ .
- $E = 2\,000\,000 \text{ t/m}^2 (\approx 19\,600 \text{ MPa})$ .
- $G = 1\,000\,000 \text{ t/m}^2 (\approx 9\,800 \text{ MPa})$ .

Pour le calcul, la portée des linteaux des refends sera majorée de 0.33 m (prise en compte des déformations localisées aux encastremets des linteaux). Les portées des traverses des portiques seront comptées entre nus des poteaux.

Les caractéristiques des refends et portiques sont détaillées ci-dessous et sur les figures 27 et 28.

Inerties des poutres du portique :

- $1.00 \times 0.25 : I = 0.020833 \text{ m}^4$
- $0.75 \times 0.25 : I = 0.008789 \text{ m}^4$
- $0.50 \times 0.25 : I = 0.002604 \text{ m}^4$

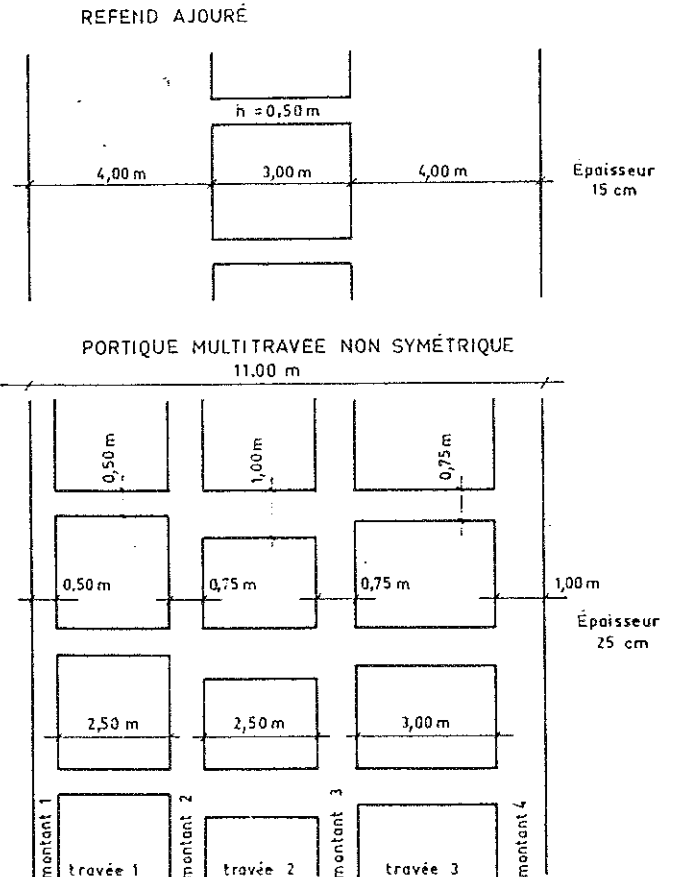


Fig. 28. — Exemple 3 : immeuble symétrique comportant des portiques. Refends et portiques en élévation.

#### A 3.2. Comparaison des résultats

Les courbes des figures ci-après comparent les résultats fournis par les deux méthodes pour les grandeurs suivantes :

- efforts tranchants dans les traverses et les linteaux ;
- moments dans les montants ;
- efforts normaux dans les montants et trumeaux ;
- déformée horizontale.

Les sauts de moment dans les montants ont été calculés à partir de leurs coefficients d'influence vis-à-vis de  $\omega$  et des  $u_j$  (voir 3.42.). Les valeurs moyennes des moments d'étages sont déduites des dérivées secondes de la déformée horizontale (de type  $\xi_o(z)$ ) donnée par le calcul par matrices transfert (voir 3.42.).

Nous constatons que la concordance des deux méthodes est généralement assez bonne : la méthode des matrices transfert approche à environ 5 % la plupart des résultats de la méthode du portique équivalent en ce qui concerne les efforts tranchants maximaux, les efforts normaux (sauf montants 2 et 3 : 10 et 15 %), les moments dans les montants (à partir du 2<sup>e</sup> étage), la déformée horizontale.

Les moments au pied des montants sont sous-estimés par la méthode des matrices transfert et présentent des écarts relatifs importants (respectivement 40 %, 45 %, 45 %, 45 %, 45 %, 45 %, 45 %, 45 %, 45 %, 45 %).

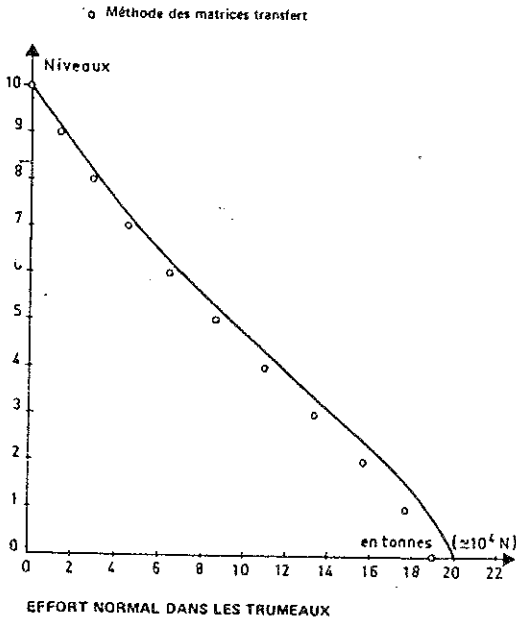


Fig. 32. — Exemple 3 : comparaison des efforts normaux dans les trumeaux.

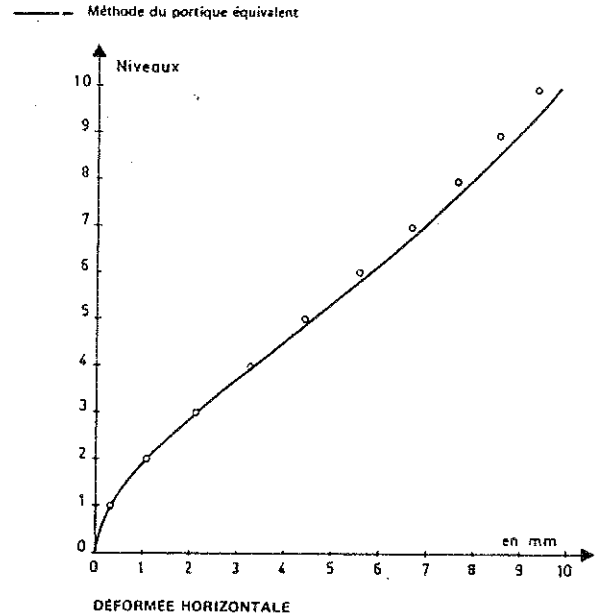
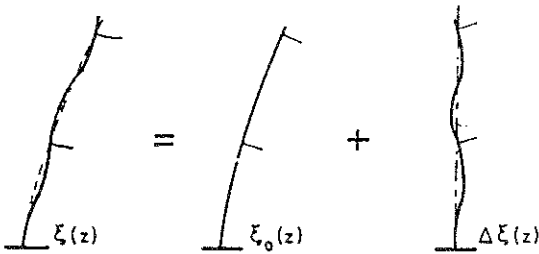


Fig. 33. — Exemple 3 : comparaison de la déformée horizontale suivant la méthode de calcul.

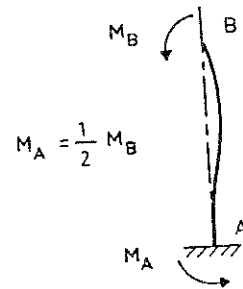
50 % et 20 %). Il est possible d'apporter une correction à ces valeurs sous-estimées des moments en pied en leur ajoutant le quart du saut de moment du premier étage. En effet, la déformée  $\xi(z)$  d'un montant du portique peut s'écrire :

$$\xi(z) = \xi_0(z) + \Delta \xi(z)$$



Or, si on isole le premier étage du montant, soumis à la déformation  $\Delta \xi(z)$ , on a :

Des considérations simples de statique montrent que



$M_B$  est majoré par la moitié du saut de moment en B, c'est-à-dire que  $M_A$  est majoré par le quart du saut de moment au premier étage. La correction indiquée ci-dessus, consistant à ajouter au moment en pied donné par la méthode des matrices transfert (égal à  $EI \xi''_0(0)$ ) le quart du saut de moment au premier étage, donne donc un majorant de la valeur réelle.

Ces majorants ont été indiqués sur les courbes des moments dans les montants du portique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ABSI (E.). — « Etude de problèmes particuliers (III) », *Annales de l'ITBTP*, série TMC/139, (mai 1971).
- [2] ALBIGES (M.) et GOULET (J.). — « Contreventement des bâtiments », *Annales de l'ITBTP*, série TMC/38, (mai 1960).
- [3] CALGARO (J.-A.) et GERY (P.-M.). — « Les matrices transfert dans le calcul des structures », Eyrolles (Paris, 1973).
- [4] COIN (A.), DECAUCHY (A.) et COLLIGNON (J.-P.). — « Murs de contreventement à ouvertures multiples », *Annales de l'ITBTP*, série TMC/152, (février 1971).
- [5] DESPEYROUX (J.) et GUILLOT (V.). — « Problèmes de contreventement », *Annales de l'ITBTP*, série TMC/147 (février 1972).
- [6] HENIN (M.). — « Calcul statique des systèmes de contreventement tridimensionnels irréguliers par la méthode des matrices transfert », Thèse de Docteur-Ingénieur, Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris VI (octobre 1976).
- [7] VLASSOV (B.Z.). — « Pièces longues en voiles minces », Eyrolles édit. (Paris, 1962).



**ANNALES** DE L'INSTITUT TECHNIQUE  
DU BATIMENT ET DES TRAVAUX PUBLICS

SERIE : THEORIES ET METHODES  
DE CALCUL

N° 357 JANVIER 1978

ISSN 0020-2568

N° 212

# **CALCUL STATIQUE DES SYSTEMES DE CONTREVENTEMENT TRIDIMENSIONNELS IRRÉGULIERS PAR LA MÉTHODE DES MATRICES-TRANSFERT**

par

**Michel HENIN**

Ingénieur civil de l'Ecole Nationale  
des Ponts et Chaussées  
Docteur-Ingénieur  
Ingénieur au Bureau Veritas

**CALCUL STATIQUE  
DES SYSTEMES DE CONTREVENTEMENT  
TRIDIMENSIONNELS IRRÉGULIERS  
PAR LA METHODE DES MATRICES TRANSFERT**

On présente une méthode générale de calcul par ordinateur des systèmes de contreventement tridimensionnels constitués de voiles reliés par des linteaux.

Cette méthode utilise la technique des matrices transfert et permet de traiter des structures présentant des fondations élastiques, des discontinuités de section et des répartitions irrégulières de linteaux. Elle tient compte du gauchissement propre des voiles et de leurs déformations d'effort normal.

Les calculs se font dans le cadre de trois hypothèses fondamentales : élasticité linéaire, théorie des poutres de Vlassov et indéformabilité transversale des sections horizontales.

Les deux premiers chapitres sont consacrés à la construction des différentes matrices transfert utilisées dans le calcul global, qui fait lui-même l'objet du troisième chapitre. Le quatrième chapitre présente deux exemples permettant d'établir des comparaisons avec d'autres méthodes. Un complément, permettant la prise en compte approchée des portiques multitravées réguliers non symétriques est exposé en annexe.

**STATISTISCHE BERECHNUNG  
DER UNREGELMÄSSIGEN DREIDIMENSIONALEN  
WINDAUSSTEIFUNGS SYSTEMEN  
DURCH DIE METHODE  
DER ÜBERTRAGUNGSMATRIZEN**

Untersucht wird hier eine allgemeine Methode zur Computerberechnung der dreidimensionalen Windaussteifungssystemen, bestehend aus durch Querriegel verbundenen Scheiben.

Diese Methode benützt die Technik der Übertragungsmatrizen und es können damit Strukturen mit elastischen Fundamenten, mit Querschnittsunterbrechungen sowie ungleichmäßige Verteilungen der Querriegel behandelt werden. Dabei wird die eigene Verwölbung der Scheiben und deren durch normale Kraft verursachten Verformungen berücksichtigt.

Die Berechnungen erfolgen im Rahmen dreier grundsätzlicher Annahmen : lineare Elastizität, Vlassov'sche Balkentheorie und Querunverformbarkeit der horizontalen Querschnitten.

Die beiden ersten Kapiteln behandeln die Konstruktion der verschiedenen in der Gesamtberechnung benützten Übertragungsmatrizen und das dritte Kapitel ist der Gesamtberechnung gewidmet. Im vierten Kapitel werden zwei Beispiele angeführt, zum Vergleich mit anderen Methoden. Im Anhang wird dazu noch die angenäherte Berücksichtigung der nichtsymmetrischen regelmässigen mehrfeldrigen Rahmen erläutert.

**Mots clés :** Méthode de calcul - Contreventement - Voile - Linteau - Matrice - Calcul matriciel - Ordinateur.

**STATIC CALCULATION  
OF IRREGULAR THREE-DIMENSIONAL  
WIND BRACING SYSTEMS  
BY THE METHOD OF TRANSFER MATRICES**

A general method of calculation by computer of three-dimensional wind bracing systems composed of shells connected by lintels is presented.

This method uses the technique of transfer matrices and makes it possible to treat structures presenting elastic foundations, section discontinuities and irregular distributions of lintels. It takes into account the warping natural to shells and their deformations by normal force.

The calculations are made in the framework of three basic assumptions: linear elasticity, Vlassov's beam theory and transverse nondeformability of horizontal sections.

The first two chapters are devoted to the building of the different transfer matrices used in the overall calculation, which is itself the subject of the third chapter. The fourth chapter presents two examples which permit establishing comparisons with other methods. A complement, whereby the regular non-symmetrical multispan frames are taken into account by approximation, is set forth in an annex.

**CALCULO ESTATICO  
DE LOS SISTEMAS DE ARRIOSTRAMIENTO  
TRIDIMENSIONALES IRREGULARES MEDIANTE  
EL METODO DE MATRICES DE TRANSFERENCIA**

Se presenta un método general de cálculo mediante computador de los sistemas de arriostramiento tridimensionales constituidos por láminas unidas mediante dinteles.

Este método emplea la técnica de las matrices de transferencia y permite tratar estructuras que presentan cimientos elásticos, discontinuidades de sección y distribuciones irregulares de los dinteles, teniendo en cuenta el alabeo propio de las láminas y sus deformaciones originadas por el esfuerzo normal.

Los cálculos se efectúan en el contexto de tres hipótesis fundamentales: elasticidad lineal, teoría de las vigas de Vlassov e indeformabilidad transversal de las secciones horizontales.

Los dos primeros capítulos han sido dedicados a la construcción de las distintas matrices de transferencia utilizadas en el cálculo global, el cual, es tratado en el tercer capítulo. El cuarto capítulo presenta dos ejemplos que permiten establecer comparaciones con los demás métodos. En el anexo se presenta un complemento que permite tomar realmente en consideración los pórticos de crujeas múltiples no simétricos.

*Les thèses et la méthode d'exposition adoptées par les auteurs peuvent parfois heurter certains points de vue habituellement admis. Mais il doit être compris que ces thèses, à l'égard desquelles l'Institut Technique ne saurait prendre parti, ne visent en rien les personnes ni le principe des Institutions.*