

Méthode de combinaison modale pour deux paramètres à partir des contraintes normales en combinaison quadratique complète (CQC)

Objet : Les deux paramètres sont le moment fléchissant et l'effort normal pour le calcul des armatures longitudinales d'une section rectangulaire en béton armé.

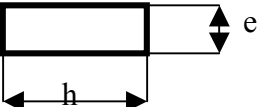
Principe de la méthode : à partir des contraintes normales linéaires modales, on calcule la contrainte normale issue de la CQC des précédentes en tout point de la section ; puis on détermine la droite tangente à la courbe obtenue au point considéré avant d'obtenir le couple « probable » par intégration.

Nous allons démontrer que cette méthode est équivalente à la méthode générale qui passe par la détermination d'une ellipse d'équation : $(N/\bar{N})^2 + (M/\bar{M})^2 - 2\rho(NM/\bar{N}\bar{M}) = 1 - \rho^2$

Démonstration :

Notations :

▪ N_i et M_i = effort normal et moment fléchissant (pris avec leur signe) pour le mode i .

▪ Section BA : 

▪ $\bar{N} = \sqrt{\sum_i \sum_j \beta_{ij} N_i N_j}$: CQC des efforts normaux

▪ $\bar{M} = \sqrt{\sum_i \sum_j \beta_{ij} M_i M_j}$: CQC des moments fléchissants

▪ $\rho = (\sum_i \sum_j \beta_{ij} M_i N_j) / (\bar{M} \bar{N})$: coefficient de corrélation entre les deux paramètres

▪ σ_i : contrainte normale linéaire pour le mode i

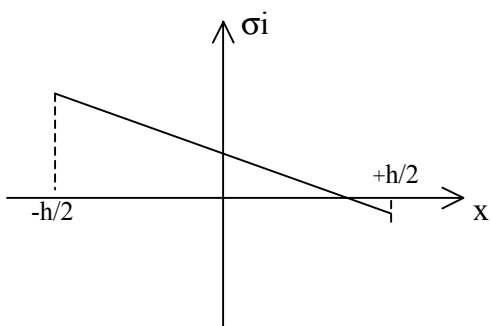
▪ σ : contrainte normale CQC

▪ σ_T : contrainte tangente à σ ; variable $=x_T$

▪ N et M : couple probable recherché

Equation des contraintes normales modales :

On suppose le repère centré sur le centre de gravité de la section



$$\sigma_i(x) = N_i/S + M_i x / I$$

avec $S = eh$ (aire)

$$I = (eh^3)/12 \text{ (inertie)}$$

$$\text{soit } \sigma_i(x) = (N_i/eh) + (12 M_i x / (eh^3))$$

Equation de la contrainte CQC :

$$\begin{aligned}
 \sigma(x) &= \sqrt{(\sum_i \sum_j \beta_{ij} \sigma_i \sigma_j)} \\
 &= \sqrt{\{\sum_i \sum_j \beta_{ij} [N_i/eh + 12 M_i x / (eh^3)] \cdot [N_j/eh + 12 M_j x / (eh^3)]\}} \\
 &= \sqrt{\{\sum_i \sum_j \beta_{ij} [(144 M_i M_j x^2 / (e^2 h^6)) + (N_i N_j / e^2 h^2) + (12 M_i N_j x / (e^2 h^4)) + (12 M_j N_i x / (e^2 h^4))]\}} \\
 &= \sqrt{\{\sum_i \sum_j \beta_{ij} [(144 M_i M_j x^2 / (e^2 h^6)) + (N_i N_j / e^2 h^2) + (24 M_i N_j x / (e^2 h^4))]\}} \\
 &= \sqrt{\{[144 \bar{M}^2 x^2 / (e^2 h^6)] + [\bar{N}^2 / e^2 h^2] + [24 \rho \bar{M} \bar{N} x / (e^2 h^4)]\}}
 \end{aligned}$$

Posons: $A = 144 \bar{M}^2 / (e^2 h^6)$
 $B = 24 \rho \bar{M} \bar{N} / (e^2 h^4)$
 $C = \bar{N}^2 / e^2 h^2$

On a donc: $\sigma(x) = \sqrt{Ax^2 + Bx + C}$

Equation de la contrainte tangente σ_T , tangente au point d'abscisse x :

$$\sigma_T(x_T) = \sigma'(x) (x_T - x) + \sigma(x)$$

avec $\sigma'(x) = (2Ax + B) / [2\sqrt{Ax^2 + Bx + C}]$

soit $\sigma_T(x_T) = [(2Ax + B)(x_T - x) / (2\sqrt{Ax^2 + Bx + C})] + [\sqrt{Ax^2 + Bx + C}]$

Couple probable N et M :

On les obtient par intégration de σ_T

$$N = \int_{-h/2}^{+h/2} (e \sigma_T(x_T) dx_T) = e \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_T(x_T) dx_T)$$

$$N = e \int_{-h/2}^{+h/2} \{ [(2Ax + B)(x_T - x) / (2\sqrt{Ax^2 + Bx + C})] + [\sqrt{Ax^2 + Bx + C}] \} dx_T$$

$$N = e \left\{ [(2Ax + B) \left[\frac{(x_T^2/2) - (x x_T)}{-h/2} \right] / (2\sqrt{Ax^2 + Bx + C})] + [\sqrt{Ax^2 + Bx + C} \left[\frac{(x_T)}{-h/2} \right]] \right\}$$

$$N = e \{ [(2Ax + B)(-x h) / (2\sqrt{Ax^2 + Bx + C})] + [(h) \sqrt{Ax^2 + Bx + C}] \}$$

$$N = e h [-x(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C)] / (2\sqrt{Ax^2 + Bx + C})$$

$$N = e h (Bx + 2C) / (2\sqrt{Ax^2 + Bx + C})$$

$$M = \int_{-h/2}^{+h/2} (e \sigma_T(x_T) x_T dx_T) = e \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_T(x_T) x_T dx_T)$$

$$M = e \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\left[\frac{(2Ax + B)(x_T^2 - x_T)}{2\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} \right] + [x_T \sqrt{Ax^2 + Bx + C}] \right) dx_T$$

$$M = e \left\{ \left[\frac{(2Ax + B) \left[\frac{x_T^3}{3} - (x_T^2/2) \right]}{2\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} \right] + \left[\sqrt{Ax^2 + Bx + C} \left[\frac{x_T^2}{2} \right] \right] \right\}_{-h/2}^{+h/2}$$

$$M = e [(2Ax + B) h^3 / (24\sqrt{Ax^2 + Bx + C})]$$

$$M = e h^3 [(2Ax + B) / (24\sqrt{Ax^2 + Bx + C})]$$

Vérification de l'équation du couple (M,N) :

On remplace A, B et C par leur expression, tout en élevant au carré N et M.

$$N^2 = \frac{e^2 h^2 (Bx + 2C)^2}{4(Ax^2 + Bx + C)} = \frac{e^2 h^2 (B^2x^2 + 4C^2 + 4BCx)}{4(Ax^2 + Bx + C)}$$

$$N^2 = \frac{e^2 h^2 \left(\frac{576 \rho^2 \bar{M}^2 \bar{N}^2 x^2}{e^4 h^8} + \frac{96 \rho \bar{M} \bar{N}^3 x}{e^4 h^6} + \frac{4 \bar{N}^4}{e^4 h^4} \right)}{4 \left(\frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2} \right)}$$

$$N^2 = \frac{\frac{144 \rho^2 \bar{M}^2 \bar{N}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N}^3 x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^4}{e^2 h^2}}{\frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2}}$$

$$M^2 = \frac{e^2 h^6 (2Ax + B)^2}{576 (Ax^2 + Bx + C)} = \frac{e^2 h^6 (4A^2 x^2 + 4AB x + B^2)}{576 (Ax^2 + Bx + C)}$$

$$M^2 = \frac{e^2 h^6 \left(\frac{82944 \bar{M}^4 x^2}{e^4 h^{12}} + \frac{13824 \rho \bar{M}^3 \bar{N} x}{e^4 h^{10}} + \frac{576 \rho^2 \bar{N}^2 \bar{M}^2}{e^4 h^8} \right)}{576 \left(\frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2} \right)}$$

$$M^2 = \frac{\frac{144 \bar{M}^4 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M}^3 \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\rho^2 \bar{M}^2 \bar{N}^2}{e^2 h^2}}{\frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2}}$$

$$MN = \frac{e^2 h^4 (Bx + 2C) (2Ax + B)}{48 (Ax^2 + Bx + C)} = \frac{e^2 h^4 (2AB x^2 + B^2 x + 4AC x + 2BC)}{48 (Ax^2 + Bx + C)}$$

$$MN = \frac{48 \left(\frac{144 \rho \bar{M}^3 \bar{N} x^2}{e^2 h^6} + \frac{12 \rho^2 \bar{M}^2 \bar{N}^2 x}{e^2 h^4} + \frac{12 \bar{M}^2 \bar{N}^2 x}{e^2 h^4} + \frac{\rho \bar{M} \bar{N}^3}{e^2 h^2} \right)}{48 \left(\frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2} \right)}$$

$$MN = \frac{\frac{144 \rho \bar{M}^3 \bar{N} x^2}{e^2 h^6} + \frac{12 \rho^2 \bar{M}^2 \bar{N}^2 x}{e^2 h^4} + \frac{12 \bar{M}^2 \bar{N}^2 x}{e^2 h^4} + \frac{\rho \bar{M} \bar{N}^3}{e^2 h^2}}{\frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2}}$$

$$(M / \bar{M})^2 + (N / \bar{N})^2 - 2\rho (NM / \bar{N} \bar{M}) = \frac{\frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^4 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\rho^2 \bar{N}^2}{e^2 h^2}}{\frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2}}$$

$$+ \frac{\frac{144 \rho^2 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2}}{\frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2}}$$

$$-2\rho \frac{\left(\frac{144 \rho \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{12 \rho^2 \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{12 \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\rho \bar{N}^2}{e^2 h^2} \right)}{\frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2}}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho^2 \bar{N}^2}{e^2 h^2} + \frac{144 \rho^2 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} - \frac{288 \rho^2 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} - \frac{24 \rho^3 \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} \\
= 1 + & \frac{\frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2}}{\frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} - \frac{2\rho^2 \bar{N}^2}{e^2 h^2}} \\
+ & \frac{\frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2}}{\left(\frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2} + \frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} \right)} \\
= 1 - \rho^2 & \frac{\frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2}}{\left(\frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2} + \frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} \right)} \\
= 1 - \rho^2 &
\end{aligned}$$

Soit $(M / \bar{M})^2 + (N / \bar{N})^2 - 2\rho (NM / \bar{N} \bar{M}) = 1 - \rho^2$ (Equation de l'ellipse)

Conclusion : les deux méthodes sont donc mathématiquement équivalentes

Laurent GUISET
Bureau d'études Setec-Bascou
Rivesaltes, janvier 2005