

## I - MATRICE TRANSFERT D'UN ENSEMBLE DE REFENDS ET DE PROFILS OUVERTS TRAVAILLANT CONJOINTEMENT.

### I.1. - Hypothèses fondamentales.

#### I.1.1. - Géométrie

Nous entendons par "ensemble de refends et de profils ouverts travaillant conjointement", un groupe de refends et de profils ouverts d'axes parallèles à une même direction  $\vec{Oz}$ , que nous assimilerons implicitement par la suite à la verticale, et assujettis à conserver des distances mutuelles invariables, par suite de la présence de planchers horizontaux, supposés infiniment rigides dans leur plan.

Ces refends et profils ouverts ont tous même longueur lorsqu'ils ne sont pas chargés, et conservent tout au long de cette longueur les mêmes caractéristiques géométriques et mécaniques.

Nous supposerons dans ce chapitre qu'aucun linteau ne relie un élément de contreventement à un autre, ou deux points d'un même élément.

#### I.1.2. - Comportement

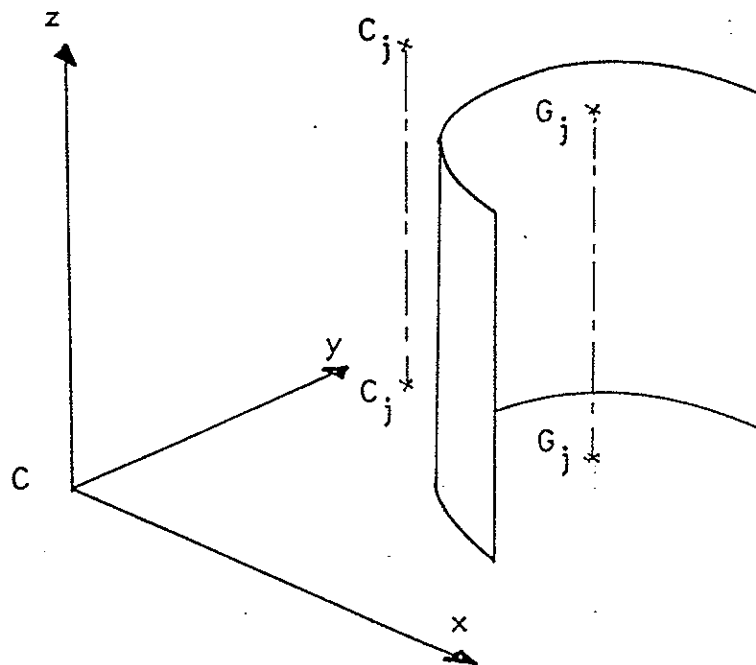
Tous les calculs se font dans le domaine élastique.

L'hypothèse d'invariabilité des distances mutuelles, supposée vérifiée non seulement au niveau des planchers, mais aussi à toutes les cotes intermédiaires, entraîne que chacune des sections transversales du système ne possède horizontalement que 3 degrés de liberté. Nous savons qu'un tel système admet une ligne des centres de flexion  $// \vec{Oz}$ , qui est confondue avec le lieu des barycentres des inerties. Aussi, pourrions-nous caractériser le déplacement horizontal de toute section par la donnée des deux flèches horizontales principales de son centre de flexion et de l'angle de rotation autour de celui-ci.

## I.2. - Notations, conventions de signe.

### I.2.1. - Géométrie

La figure ci-dessous représente un élément de contreventement  $j$ , situé dans le repère principal  $(Cxyz)$  du tronçon.



$C$  : Centre de flexion principal de la section transversale totale.  
 $\vec{C}_x, \vec{C}_y$  : Directions principales.

Le centre de gravité  $G$  de la section totale du tronçon n'intervenant pas dans les raisonnements ultérieurs, c'est le repère  $Cxyz$  (trirectangle direct) que nous appellerons repère principal du tronçon.  $\omega(M)$  désignera l'aire sectorielle principale de  $M$ , qui sera comptée positivement pour une rotation positive (sens trigonométrique) du rayon vecteur  $\vec{CM}$ .

$G_j, C_j$  : Centres de gravité et de flexion de l'élément  $j$ .  
 $E_j, G_j$  : Modules d'élasticité longitudinal et transversal de l'élément  $j$   
(seul le contexte permettra de ne pas confondre  $G_j$  ainsi défini avec le centre de gravité de  $j$ ).

On introduit  $EI_{xx}$ ,  $EI_{yy}$ ,  $EJ_{\omega}$ ,  $GJ_d$  (resp. rigidités flexionnelles suivant  $Cxz$  et  $Cyz$ , rigidités torsionnelles de Vlasov et de Saint-Venant):

$$EI_{xx} = \sum_j E_j \int_{\text{élément } j} (x(M) - x(G_j))^2 \cdot dF$$

$$EI_{yy} = \sum_j E_j \int_{\text{élément } j} (y(M) - y(G_j))^2 \cdot dF$$

$$EJ_{\omega} = \sum_j E_j \int_{\text{élément } j} (\omega(M))^2 \cdot dF$$

$$GJ_d = \frac{1}{3} \sum_j G_j \int_{\text{élément } j} e^3(s) ds$$

avec  $\left\{ \begin{array}{l} e(s) = \text{épaisseur du voile à l'abscisse curviligne } s. \\ dF = e(s) \cdot ds. \end{array} \right.$

### I.2.2. - Sollicitations

$q_x(z)$  : Densité de charge transversale //  $\vec{Cx}$ , sollicitant toute la section de cote  $z$ , et appliquée en C.

$q_y(z)$  : Homologue de  $q_x(z)$  pour la direction  $\vec{Cy}$ .

$p_j(z)$  : Densité d'effort longitudinal appliquée à la cote  $z$  à l'élément  $j$ , et centrée en  $G_j$ , centre de gravité de  $j$ .

$\gamma_x(z)$  : Densité de couple d'axe  $\vec{Cx}$  sollicitant toute la section de cote  $z$  et appliquée en C.

$\gamma_y(z)$  : Homologue de  $\gamma_x(z)$  pour la direction  $\vec{Cy}$ .

(Les densités  $\gamma_x(z)$  et  $\gamma_y(z)$  incluent les couples dus à d'éventuels excentrement des charges  $p_j(z)$ .)

$m(z)$  : Densité de couple de torsion (axe  $\vec{Cz}$ ) appliquée au centre de flexion principal C de la section de cote  $z$ . Cette densité inclue les éventuels couples de torsion créés par le transport de  $q_x(z)$  et  $q_y(z)$  en C.

$b(z)$  : Densité de bimoment sollicitant la section  $z$ . Cette densité comprend en particulier les bimoments induits par les densités  $p_j(z)$ ,  $\gamma_x(z)$ ,  $\gamma_y(z)$ .

Le sens positif de ces différentes densités est le sens positif des axes qui les portent. Pour les bimoments, la convention de signe est explicitée au paragraphe suivant.

Ces densités sont des densités généralisées englobant les efforts concentrés (utilisation des fonctions de DIRAC et de HEAVISIDE).

### I.2.3. - Efforts internes

$T_x(z)$  : Effort tranchant suivant  $\vec{C}_x$  = résultante suivant  $\vec{C}_x$  des efforts transversaux exercés par la partie du tronçon ( $t > z$ ) sur la partie ( $t \leq z$ ). Appliqué en C.

$T_y(z)$  : Homologue de  $T_x(z)$  suivant l'axe  $\vec{C}_y$ .

$M_x(z)$  : Moment de flexion d'axe  $\vec{C}_x$  (flexion dans le plan principal  $C_y$ ) : composante suivant  $\vec{C}_x$  de la part de moment résultant exercée par la partie ( $t > z$ ) sur ( $t \leq z$ ) et effectivement reprise en flexion par la structure (par opposition à la part de moment reprise en compression-traction dans les éléments de contreventement). Appliqué en C.

$M_y(z)$  : Homologue de  $M_x(z)$  pour  $\vec{C}_y$ .

$N_j(z)$  : Effort normal dans l'élément  $j$  : résultante des efforts longitudinaux exercés par la partie de l'élément  $j$  ( $t > z$ ) sur la partie ( $t \leq z$ ). Appliqué en  $G_j$ .

$H(z)$  : Moment de torsion : moment de torsion exercé par la partie ( $t > z$ ) sur la partie ( $t \leq z$ ). Appliqué en C.

$B(z)$  : Bimoment : bimoment exercé par la partie ( $t > z$ ) sur la partie ( $t \leq z$ ).

Signe des bimoments : Par convention, un effort longitudinal positif (du sens de  $\vec{Cz}$ ) appliqué en un point  $M(x,y,\omega)$  de la section  $z$  du tronçon appartenant à la partie ( $t \leq z$ ) crée un bimoment du signe de  $\omega$ . Tous les autres facteurs internes sont comptés positivement dans le sens des axes qui les portent.

#### I.2.4. - Déformations

$v_x(z)$  : Déplacement horizontal suivant  $\vec{Cx}$  du centre de flexion principal de la section de cote  $z$ .

$v_y(z)$  : Homologue de  $v_x(z)$  suivant  $\vec{Cy}$ .

$\theta(z)$  : Angle de torsion autour de  $C$  de la section de cote  $z$ .

$v'_x(z), v'_y(z), \theta'(z)$  : Dérivées par rapport à  $z$  de  $v_x(z), v_y(z), \theta(z)$

$u_j(z,M)$  : Déplacement longitudinal à la cote  $z$  d'un point  $M$  de l'élément de contreventement  $j$ .

$u_j(z)$  : Déplacement longitudinal d'ensemble de la section transversale de l'élément  $j$  à la cote  $z$ .

(Ce déplacement est défini comme suit :  $u_j(z,M)$  est la somme de  $u_j(z)$ , des déplacements dus à la flexion et du déplacement de gauchissement).

Les angles sont comptés positivement dans le sens direct et les déplacements dans le sens des axes qui les portent.

### I.3. - Matrice transfert de flexion.

#### I.3.1. - Flexion dans le plan principal Cxz

- Nous supposons que la théorie des poutres s'applique aux refends et profils ouverts.
- Nous négligeons les déformations d'effort tranchant.

En écrivant l'équilibre d'une tranche de tronçon d'épaisseur  $dz$ , on trouve, avec les conventions de signes données précédemment,

$$\begin{cases} \frac{dT_x}{dz}(z) &= -q_x(z) \\ \frac{dM_y}{dz}(z) &= -T_x(z) - Y_y(z) \end{cases}$$

La théorie de l'élasticité nous permet d'écrire :

$$\frac{d^2 v_x}{dz^2}(z) = + \frac{M_y}{EI_{xx}}(z) \quad (\text{pas de déformations d'effort tranchant})$$

Par intégrations successives, on obtient alors :

$$T_x(z) = T_x(o) - \int_0^z q_x(t)dt = T_x(o) + \bar{T}_x(z)$$

$$M_y(z) = M_y(o) - T_x(o) \cdot z - \int_0^z \bar{T}_x(t)dt - \int_0^z Y_y(t)dt$$

$$\Leftrightarrow M_y(z) = M_y(o) - T_x(o) \cdot z + \bar{M}_y(z)$$

$$v'_x(z) = v'_x(o) + \frac{M_y(o)}{EI_{xx}} \cdot z - \frac{T_x(o)}{2 \cdot EI_{xx}} \cdot z^2 + \bar{v}'_x(z)$$

$$v_x(z) = v_x(o) + v'_x(o) \cdot z + \frac{M_y(o)}{2EI_{xx}} \cdot z^2 - \frac{T_x(o)}{6EI_{xx}} \cdot z^3 + \bar{v}_x(z)$$

$$\text{Avec } \bar{T}_x(z) = - \int_0^z q_x(t) \cdot dt$$

$$\bar{M}_y(z) = - \int_0^z (\bar{T}_x(t) + Y_y(t)) \cdot dt$$

$$\bar{v}'_x(z) = \frac{1}{EI_{xx}} \cdot \int_0^z \bar{M}_y(t) \cdot dt.$$

$$\bar{v}_x(z) = \int_0^z \bar{v}'_x(t) \cdot dt$$

D'où la relation matricielle :

$$\begin{bmatrix} v_x(z) \\ v'_x(z) \\ M_y(z) \\ T_x(z) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z & \frac{z^2}{2EI_{xx}} & -\frac{z^3}{6EI_{xx}} & \bar{v}_x(z) \\ 0 & 1 & \frac{z}{EI_{xx}} & -\frac{z^2}{2EI_{xx}} & \bar{v}'_x(z) \\ 0 & 0 & 1 & -z & \bar{M}_y(z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{T}_x(z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_x(o) \\ v'_x(o) \\ M_y(o) \\ T_x(o) \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice ci-dessus, écrite pour  $z = l$ , est la matrice transfert de flexion dans le plan principal  $Cxz$  du tronçon de longueur  $l$  étudié.

### I.3.2. - Flexion dans le plan principal Cyz

Le principe du calcul est le même que dans le paragraphe précédent : seuls quelques signes vont être modifiés. L'équilibre d'une tranche de tronçon d'épaisseur  $dz$  nous donne cette fois :

$$\frac{dT_y}{dz}(z) = -q_y(z)$$

et 
$$\frac{dM_x}{dz}(z) = T_y(z) - Y_x(z)$$

De même, on a cette fois 
$$\frac{d^2 v_y}{dz^2}(z) = -\frac{M_x}{EI_{yy}}(z)$$

Finalement, tous calculs faits, on aboutit à la relation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} v_y(z) \\ v'_y(z) \\ M_x(z) \\ T_y(z) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z & -\frac{z^2}{2EI_{yy}} & -\frac{z^3}{6EI_{yy}} & \bar{v}_y(z) \\ 0 & 1 & -\frac{z}{EI_{yy}} & -\frac{z^2}{2EI_{yy}} & \bar{v}'_y(z) \\ 0 & 0 & 1 & +z & \bar{M}_x(z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{T}_y(z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_y(z) \\ v'_y(z) \\ M_x(z) \\ T_y(z) \\ 1 \end{bmatrix}$$



Avec

$$\bar{T}_y(z) = - \int_0^z q_y(t) \cdot dt$$

$$\bar{M}_x(z) = \int_0^z (\bar{T}_y(t) - \gamma_x(t)) \cdot dt$$

$$\bar{v}'_y(z) = - \frac{1}{EI_{xx}} \int_0^z \bar{M}_y(t) \cdot dt$$

$$\bar{v}_y(z) = \int_0^z \bar{v}'_y(t) dt$$

La matrice ci-dessus, écrite pour  $z = l$ , est la matrice transfert de flexion dans le plan principal Cyz du tronçon de longueur  $l$  étudié.

#### I.4. - Matrice transfert de torsion gauchie.

##### I.4.1. - Rappels

Rappelons brièvement, sans les démontrer, quelques relations fondamentales de la torsion gauchie. (Les notations sont celles de VLASOV, Réf. 20).

Le déplacement longitudinal de gauchissement  $u(z,s)$  d'un point  $M(z,s)$  de la section de cote  $z$  est proportionnel à l'aire sectorielle  $\omega(s)$  de ce point, et s'écrit :

$$u(z,s) = -\omega(s) \cdot \theta'(z)$$

On en déduit que la répartition des contraintes normales complémentaires se fait dans la section suivant la loi des aires sectorielles :

$$\sigma(z,s) = E \cdot \frac{\partial u}{\partial z}(z,s) = -E \omega(s) \cdot \theta''(z)$$

Ces contraintes normales induisent sur l'ensemble de la section un bimoment  $B(z)$  défini comme suit :

$$\begin{aligned} B(z) &= \int_{\text{section}} \sigma(z,s) \cdot \omega(s) dF = -\theta''(z) \cdot \int_{\text{section}} E \cdot \omega^2(s) dF \\ &= -EJ_{\omega} \cdot \theta''(z) \end{aligned}$$

Les contraintes tangentielles complémentaires, dues au gauchissement des sections transversales du tronçon, se distribuent proportionnellement aux moments sectoriels statiques  $S_{\omega}(s)$  :

$$\begin{aligned} S_{\omega}(s) &= \int_0^s \omega(s) dF \\ \text{et } \tau(z,s) &= \frac{E \cdot S_{\omega}(s)}{\delta(s)} \cdot \theta'''(z) \end{aligned} \quad \left( \delta(s) \text{ épaisseur de la voile en } s \right)$$

(on suppose dans cette formule qu'il n'y a pas de charges extérieures longitudinales).

Ces contraintes tangentielles induisent un moment de torsion

$H_{\omega}(z)$  :

$$H_{\omega}(z) = \int_{\text{section}} (\tau \cdot \delta) d\omega = \Theta''''(z) \cdot \int_{\text{section}} E \cdot S_{\omega}(s) d\omega$$

$$H_{\omega}(z) = -EJ_{\omega} \cdot \Theta''''(z) \quad (\text{après transformation})$$

Le moment total de torsion  $H(z)$  s'obtient en ajoutant à  $H_{\omega}(z)$  le moment de torsion pure dite de  $S_{\omega}^{\xi}$  venant, du aux contraintes de cisaillement classiques :

$$H_k(z) = GJ_d \cdot \Theta'(z)$$

D'où l'équation différentielles de torsion (sans chargement longitudinal) :

$$H_{\omega}(z) + H_k(z) = H(z)$$

$$(1) \quad GJ_d \cdot \Theta'(z) - EJ_{\omega} \cdot \Theta''''(z) = H(z)$$

Rappelons que par convention nous avons appelé moment de torsion de la section  $z$ , le moment résultant des efforts appliqués par la partie ( $t > z$ ) du tronçon sur ( $t \leq z$ ). On a donc,  $m(z)$  étant la densité extérieure de moment de torsion à la cote  $z$  (densité au sens large, incluant les moments concentrés) :

$$H(z) = \int_z^l m(t) dt$$

$$\text{d'où} \quad \frac{dH}{dz}(z) = -m(z)$$

Par dérivation de la relation ( 1 ), nous déduisons l'équation différentielle de torsion (sans charges longitudinales), reliant les dérivées seconde et quatrième de  $\Theta(z)$  à la densité de moment de torsion  $m(z)$ .

$$EJ_{\omega} \cdot \Theta^{IV}(z) - GJ_d \cdot \Theta^{II}(z) = m(z)$$

Si le tronçon est de plus soumis à un chargement longitudinal, ce chargement induit une densité de bimoment extérieur  $b(z)$  et l'équation de torsion devient :

$$EJ_{\omega} \cdot \Theta^{IV}(z) - GJ_d \cdot \Theta^{II}(z) = m(z) + \frac{db}{dz}(z)$$

I.4.2. - Construction de la matrice transfert de torsion gauchie

Pour résoudre l'équation différentielle de torsion donnée ci-dessus, Vlassov utilise la méthode des paramètres initiaux, dont le principe est très proche de celui d'un calcul par matrice transfert (Réf. 20, chap. III). Plutôt que de rappeler le raisonnement de Vlassov, nous préférons retrouver les formules finales par un calcul direct beaucoup plus rapide utilisant les fonctions de Dirac et Heaviside (densités de charges généralisées).

Soit  $m(z)$  (resp.  $b(z)$ ) la densité de moment de torsion (resp. de bimoment) appliquée au tronçon. Ces densités englobent les efforts concentrés, si il y en a. L'angle de torsion  $\Theta(z)$  est solution de l'équation différentielle suivante : (cf. paragraphe précédent).

$$EJ_{\omega} \cdot \Theta^{IV}(z) - GJ_d \cdot \Theta^{II}(z) = m(z) + \frac{db}{dz}(z)$$

$$\Leftrightarrow \Theta^{IV} - \frac{k^2}{l^2} \Theta^{II} = \frac{1}{EJ_{\omega}} (m(z) + b'(z))$$

Avec :  $k^2 = l^2 \frac{GJ_d}{EJ_{\omega}}$

La solution  $\Theta(z)$  que nous cherchons peut s'écrire comme la somme de la solution générale  $\Theta_0(z)$  de l'équation sans second membre

et d'une solution particulière  $\bar{\theta}(z)$  de l'équation complète :

$$\theta(z) = \theta_0(z) + \bar{\theta}(z)$$

Une fois choisie la solution particulière  $\bar{\theta}(z)$ , la détermination des coefficients de  $\theta_0(z)$  se fait de façon à satisfaire les conditions aux limites imposées à  $\theta(z)$ .

Comme solution particulière  $\bar{\theta}(z)$ , nous prendrons la fonction  $\bar{\theta}(z)$  vérifiant :

$$\bar{\theta}(0) = \bar{\theta}'(0) = \bar{\theta}''(0) = \bar{\theta}'''(0) = 0$$

Cette fonction peut être facilement déterminée par la méthode suivante :

On considère le polynôme  $P(x)$  associé à l'équation sans second membre :

$$P(x) = x^4 - \frac{k^2}{1^2} x^2 = x^2 \cdot \left(x - \frac{k}{1}\right) \cdot \left(x + \frac{k}{1}\right)$$

La décomposition en éléments simples de  $\frac{1}{P(x)}$  s'écrit :

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1^3}{2 k^3} \cdot \left(\frac{1}{x - \frac{k}{1}} + \frac{1}{x + \frac{k}{1}}\right) - \frac{1^2}{k^2} \cdot \frac{1}{x^2}$$

Considérons maintenant la fonction  $\varphi(z)$ , associée à  $\frac{1}{P(x)}$  et obtenue en remplaçant les termes

$$\frac{1}{(x-x_i)^k} \text{ par } e^{x_i z} \cdot \frac{z^{k-1}}{k-1!}$$

$$\text{ici, } \varphi(x) = \frac{1^3}{2 k^3} (e^{\frac{k}{l}z} - e^{-\frac{k}{l}z}) - \frac{1^2}{k^2} \cdot z$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x) = \left( \frac{1}{k} \operatorname{sh} \left( \frac{k}{l} \cdot z \right) - z \right) \cdot \frac{EJ\omega}{GJ_d}$$

On déduit alors l'expression de la fonction  $\bar{\theta}(z)$  cherchée par :

$$\bar{\theta}(z) = \int_0^z \varphi(z-u) \cdot \left( \frac{1}{EJ\omega} (m(u) + b'(u)) \right) \cdot du$$

$$\Leftrightarrow \bar{\theta}(z) = \frac{1}{GJ_d} \cdot \int_0^z \left( \frac{1}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l}(z-u) - (z-u) \right) \cdot (m(u) + b'(u)) \cdot du$$

Par dérivation de cette fonction  $\bar{\theta}(z)$ , nous introduisons les fonctions  $\bar{\theta}'(z)$ ,  $\bar{B}(z)$  et  $\bar{H}(z)$  :

$$\left| \begin{array}{l} \bar{\theta}'(z) = \frac{d\bar{\theta}}{dz}(z) \\ \bar{B}(z) = -EJ\omega \cdot \frac{d^2\bar{\theta}}{dz^2}(z) \\ \bar{H}(z) = GJ_d \cdot \frac{d\bar{\theta}}{dz}(z) - EJ\omega \cdot \frac{d^3\bar{\theta}}{dz^3}(z) \end{array} \right.$$

(Les trois premières dérivées de  $\bar{\theta}(z)$  existent forcément puisque  $\bar{\theta}(z)$  est solution d'une équation différentielle du 4ème ordre).

La solution générale de l'équation sans second membre a pour expression :

$$\theta_0(z) = a_1 + a_2 z + a_3 \operatorname{sh} \frac{k}{l} z + a_4 \operatorname{ch} \frac{k}{l} z$$

Puisque par construction  $\bar{\theta}(z)$  vérifie

$$\bar{\theta}(0) = \bar{\theta}'(0) = \bar{\theta}''(0) = \bar{\theta}'''(0) = 0$$

on a, pour  $z = 0$ , les relations suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} \theta(0) = \theta_0(0) = a_1 + a_4 \\ \theta'(0) = \theta'_0(0) = a_2 + \frac{k}{I} a_3 \\ \theta''(0) = \theta''_0(0) = \frac{k^2}{I^2} a_4 \\ \theta'''(0) = \theta'''_0(0) = \frac{k^3}{I^3} a_3 \end{array} \right.$$

Notons :

$$\theta_0 = \theta(0), \quad \theta'_0 = \theta'(0), \quad B_0 = -EJ_\omega \cdot \theta''(0), \quad H_0 = GJ_d \cdot \theta'(0) - EJ_\omega \cdot \theta'''(0)$$

On a alors :

$$\left| \begin{array}{l} \theta_0 = a_1 + a_4 \\ \theta'_0 = a_2 + \frac{k}{I} a_3 \\ B_0 = -GJ_d a_4 \\ H_0 = GJ_d a_2 \end{array} \right. \quad \text{d'où} \quad \left| \begin{array}{l} a_1 = \theta_0 + B_0/GJ_d \\ a_2 = H_0/GJ_d \\ a_3 = \frac{1}{k} \theta'_0 - \frac{1}{k} H_0/GJ_d \\ a_4 = -B_0/GJ_d \end{array} \right.$$

Nous en déduisons l'expression de  $\theta(z)$  en fonction de  $\theta_0$ ,  $\theta'_0$ ,  $B_0$ ,  $H_0$  et  $\bar{\theta}(z)$  :

$$\theta(z) = \theta_0 + \theta'_0 \cdot \frac{1}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{I} z + \frac{B_0}{GJ_d} (1 - \operatorname{ch} \frac{k}{I} z) + \frac{H_0}{GJ_d} (z - \frac{1}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{I} z) + \bar{\theta}(z)$$

Par des dérivations successives, nous obtenons :

$$\theta'(z) = \theta'_0 \cdot \left(\text{ch} \frac{k}{l} z\right) + B_0 \cdot \left(-\frac{k}{l} \text{sh} \frac{k}{l} z\right) / GJ_d + H_0 \cdot \left(1 - \text{ch} \frac{k}{l} z\right) / GJ_d + \bar{\theta}'(z)$$

$$B(z) = \theta'_0 \cdot \left(-\frac{1}{k} \text{sh} \frac{k}{l} z\right) \cdot GJ_d + B_0 \cdot \text{ch} \frac{k}{l} z + H_0 \cdot \frac{1}{k} \text{sh} \frac{k}{l} z + \bar{B}(z)$$

$$H(z) = H_0 + \bar{H}(z)$$

Ces quatre relations peuvent se mettre sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \theta(z) \\ \theta'(z) \\ B(z) \\ H(z) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{k} \text{sh} \frac{k}{l} z & (1 - \text{ch} \frac{k}{l} z) / GJ_d & (z - \frac{1}{k} \text{sh} \frac{k}{l} z) / GJ_d & \bar{\theta}(z) \\ 0 & \text{ch} \frac{k}{l} z & (-\frac{k}{l} \text{sh} \frac{k}{l} z) / GJ_d & (1 - \text{ch} \frac{k}{l} z) / GJ_d & \bar{\theta}'(z) \\ 0 & (-\frac{1}{k} \text{sh} \frac{k}{l} z) GJ_d & \text{ch} \frac{k}{l} z & \frac{1}{k} \text{sh} \frac{k}{l} z & \bar{B}(z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{H}(z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta'_0 \\ B_0 \\ H_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice 5 x 5 ci-dessus, écrite pour  $z = l$  est la matrice transfert de torsion gauche de l'ensemble de profils ouverts et de refends étudié.



### I.5. - Matrice transfert de compression-traction.

Appelons  $m$  le nombre d'éléments de contreventement (refends ou profils ouverts) travaillant au sein du tronçon étudié, et soit  $j$  l'indice d'un quelconque de ces éléments ( $1 \leq j \leq m$ )

Avec les notations et conventions de signe définies au paragraphe I.2., nous aurons :

$$\begin{cases} \frac{dN_j}{dz}(z) = -p_j(z) \\ \frac{du_j}{dz}(z) = \frac{N_j}{E_j S_j}(z) \end{cases} \quad \begin{array}{l} u_j(z) \text{ est le déplacement longitudinal d'ensemble de la section de cote } z \text{ de l'élément } j. \end{array}$$

D'où, pour tout  $j$  compris entre 1 et  $m$  :

$$\begin{cases} N_j(z) = N_j(o) - \int_0^z p_j(t) \cdot dt = N_j(o) + \bar{N}_j(z) \\ u_j(z) = u_j(o) + \frac{N_j(o)}{E_j S_j} \cdot z + \int_0^z \frac{\bar{N}_j(t)}{E_j S_j} dt = u_j(o) + \frac{N_j(o)}{E_j S_j} \cdot z + \bar{u}_j(z) \end{cases}$$

Nous pouvons écrire ces  $2m$  relations linéaires sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} u_1(z) \\ N_1(z) \\ \vdots \\ u_j(z) \\ N_j(z) \\ \vdots \\ u_m(z) \\ N_m(z) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{z}{E_1 S_1} & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & 1 & \frac{z}{E_j S_j} & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & \frac{z}{E_m S_m} & & & \\ & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1(o) \\ N_1(o) \\ \vdots \\ u_j(o) \\ N_j(o) \\ \vdots \\ u_m(o) \\ N_m(o) \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice  $(2m + 1) \times (2m + 1)$  ci-dessus, écrite pour  $z = 1$  est la matrice transfert de compression-traction du tronçon de longueur  $l$  étudié.

## I.6. - Matrice transfert globale.

### I.6.1. - Construction

Nous avons successivement calculé les sous-matrices transfert de flexion, de torsion, et de compression-traction d'un ensemble de refends et de profils ouverts travaillant conjointement. Ces sous-matrices permettent d'exprimer la transformation des vecteurs-état correspondants, au passage du tronçon de longueur  $l$  considéré.

La matrice transfert globale se déduit évidemment par "empilement" de ces différentes sous-matrices, et correspond à la juxtaposition des 3 relations matricielles établies dans les 3 paragraphes précédents.

Ces relations matricielles ont été ordonnées de la façon suivante :

- Flexion dans le plan  $Cxz$  puis  $Cyz$
- Torsion
- Compression-traction dans les  $m$  éléments du tronçon.

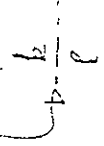
L'expression de cette matrice transfert globale d'un ensemble de refends et de profils ouverts travaillant conjointement, notée  $A_T(o,l)$  est donnée à la page suivante.

Le vecteur-état à la cote  $z$  correspondant,  $E(z)$ , a pour expression :

$$E(z) = (v_x, v'_x, M_y, T_x, v_y, v'_y, M_x, T_y, \theta, \theta', B, H, u_1, N_1, \dots, u_j, N_j, \dots, u_m, N_m, 1)(z)$$

$$\begin{bmatrix} v_x(z) \\ v'_x(z) \\ M_y(z) \\ T_x(z) \\ v_y(z) \\ v'_y(z) \\ M_x(z) \\ T_y(z) \\ \theta(z) \\ \theta'(z) \\ B(z) \\ H(z) \\ \vdots \\ u_j(z) \\ N_j(z) \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z & \frac{z^2}{2EI} & \frac{z^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{z}{EI} & \frac{z^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & z & -\frac{z^2}{2EI} & -\frac{z^3}{6EI} \\ 0 & 1 & -\frac{z}{EI} & -\frac{z^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{k} \text{sh} \frac{kz}{l} & (1 - \text{ch} \frac{kz}{l}) / GJ_d & (z - \frac{1}{k} \text{sh} \frac{kz}{l}) / GJ_d \\ 0 & \text{ch} \frac{kz}{l} & \frac{1}{k} \text{sh} \frac{kz}{l} / GJ_d & (1 - \text{ch} \frac{kz}{l}) / GJ_d \\ 0 & -GJ_d \frac{1}{k} \text{sh} \frac{kz}{l} & \text{ch} \frac{kz}{l} & \frac{1}{k} \text{sh} \frac{kz}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{z}{EJ_j} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

X



### I.6.2. - Remarques

•  $m$  étant le nombre d'éléments de contreventement du tronçon considéré, la dimension de  $A_T(o,1)$  est  $12 + 2m + 1 = 13 + 2m$ .

• Les termes des  $(12 + 2m)$  premières colonnes ne dépendent que des caractéristiques géométriques et mécaniques du tronçon étudié.

• Il est intéressant de voir ce que deviennent les termes de  $A_T(o,1)$  relatifs à la torsion gauchie, lorsque  $k$  tend vers 0 ou vers l'infini :

1er Cas :  $GJ_d \neq 0$  (les voiles sont très minces)

On a alors  $k = 1 \cdot \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}} \neq 0$

Les termes de torsion restent définis et on s'aperçoit que si on les remplace par leurs développements limités en  $k$  au voisinage de 0, on trouve des expressions identiques à celles des termes de flexion homologues. On retrouve ainsi le fait que, pour  $GJ_d$  nul, les fonctionnements de torsion et de flexion sont régis par les mêmes équations.

2ème Cas :  $EJ_\omega = 0$

Cette nullité de  $EJ_\omega$  ne se produit que lorsque la structure étudiée se présente comme un faisceau de voiles plans concourants en un même point. (Cf. Fig. a, b, c, d)

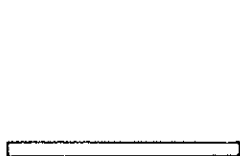


Fig. a



Fig. b

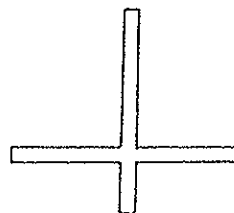


Fig. c

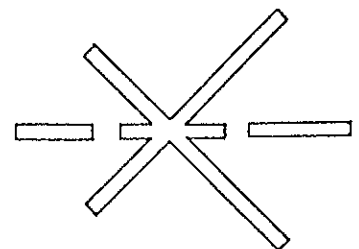


Fig. d

On a dans cette hypothèse  $k = 1 \cdot \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}} = +\infty$

Les termes de torsion prennent alors des valeurs infinies et, par conséquent,  $A_T(o,1)$  ne peut plus intervenir dans un calcul matriciel.

Il en est de même lorsque  $EJ_\omega \neq 0$  : Les termes de torsion de  $A_T(o,1)$  prennent des valeurs très grandes, et  $A_T(o,1)$  est alors très mal conditionnée.

Notons donc, que les systèmes du type de ceux des figures ci-dessus ne peuvent être calculés par la méthode exposée dans cette étude :

Fort heureusement, les systèmes de contreventement réels ne rentrent jamais dans cette catégorie, et présentent toujours des rapports

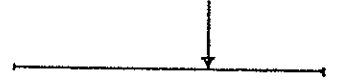
$$\frac{GJ_d}{EJ_\omega} \ll 1$$

Les termes de la dernière colonne sont les termes de charge, et se calculent à partir d'intégrales d'ordre 1, 2, 3 ou 4 des diverses densités de chargement. Nous allons les expliciter dans le paragraphe suivant.

### I.7. - Termes de charge.

Nous allons établir leurs expressions pour les deux types suivants de densité de chargement :

• Chargement concentré



• Densité trapézoïdale sur 1 zone



(Les densités triangulaires ou uniformes sont des cas particuliers de ce dernier type.)

#### I.7.1. - Termes de flexion

##### A) Flexion dans le plan principal Cxz

Rappelons que  $q_x(z)$  est la densité (au sens large) de charge transversale //  $\vec{C}_x$  et  $\gamma_y(z)$  la densité de couple d'axe  $\vec{C}_y$ .

Nous avons, au paragraphe I.3., établi les relations suivantes :

$$\bar{T}_x(z) = - \int_0^z q_x(t) dt$$

$$\bar{M}_y(z) = - \int_0^z \bar{T}_x(t) dt - \int_0^z \gamma_y(t) dt$$

$$\bar{v}'_x(z) = \frac{1}{EI_{xx}} \int_0^z \bar{M}_y(t) dt$$

$$\bar{v}_x(z) = \int_0^z \bar{v}'_x(t) dt$$

a - Charge transversale  $Q_x$  concentré en t

$$\text{On a } \begin{cases} q_x(z) = Q_x \cdot \delta(z-t) \\ \gamma_y(z) = 0 \end{cases} \quad \left( \delta(z-t) \text{ est la fonction de DIRAC au point } t \right)$$

Par intégrations successives, nous obtenons :  
 (  $Y(z-t)$  est la fonction de HEAVISIDE au point  $t$  )

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{T}_x(z) = - Q_x \cdot Y(z-t) \\ \overline{M}_y(z) = Q_x \cdot (z-t) \cdot Y(z-t) \\ \overline{v}'_x(z) = Q_x \cdot (z-t)^2 \cdot Y(z-t) / 2 EI_{xx} \\ \overline{v}_x(z) = Q_x \cdot (z-t)^3 \cdot Y(z-t) / 6 EI_{xx} \end{array} \right.$$

b - Moment  $M_y$  concentré en  $t$

On a

$$\left\{ \begin{array}{l} q_x(z) = 0 \\ \gamma_y(z) = M_y \cdot \delta(z-t) \end{array} \right.$$

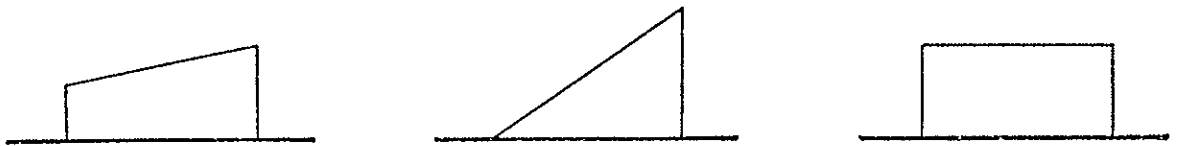
On en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{T}_x(z) = 0 \\ \overline{M}_y(z) = - M_y \cdot Y(z-t) \\ \overline{v}'_x(z) = - M_y \cdot (z-t) \cdot Y(z-t) \\ \overline{v}_x(z) = - M_y \cdot (z-t)^2 \cdot Y(z-t) / 2 EI_{xx} \end{array} \right.$$



$$\bar{v}_x(z, t_i) = \frac{Y(z-t_i)}{EI_{xx}} \cdot (\alpha \cdot (z^5 - t_i^5)/120 - \alpha \cdot t_i^4(z-t_i)/24 - \alpha \cdot t_i^3(z-t_i)^2/12 - \alpha \cdot t_i^2(z-t_i)^3/12 + \beta \cdot (z-t_i)^4/24)$$

Ces formules permettent de traiter les cas de charge suivants :



et leurs combinaisons linéaires :



d - Densité de moment trapézoïdale sur 1 zone

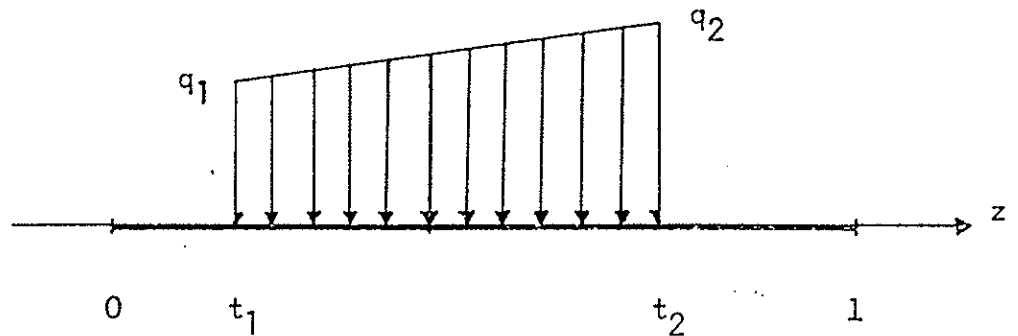
Avec les notations du paragraphe précédent,  $\gamma_y(z)$  s'écrit

$$\gamma_y(z) = (\alpha z + \beta) \cdot (Y(z-t_1) - Y(z-t_2))$$

Les formules trouvées ci-dessus sont valables pour ce cas de charge, à condition de faire :

$$\bar{T}_x(z, t_i) = 0$$

c - Charge transversale  $q_x(z)$  trapézoïdale sur une zone



On a  $q_x(z) = (\alpha z + \beta) \cdot (Y(z-t_1) - Y(z-t_2))$

avec  $\alpha = \frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1}$  et  $\beta = \frac{q_1 t_2 - q_2 t_1}{t_2 - t_1}$

Par intégration nous obtenons :

$$\begin{cases} \bar{T}_x(z) = \bar{T}_x(z, t_2) - \bar{T}_x(z, t_1) \\ \bar{M}_y(z) = \bar{M}_y(z, t_2) - \bar{M}_y(z, t_1) \\ \bar{v}'_x(z) = \bar{v}'_x(z, t_2) - \bar{v}'_x(z, t_1) \\ \bar{v}_x(z) = \bar{v}_x(z, t_2) - \bar{v}_x(z, t_1) \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{cases} \bar{T}_x(z, t_i) = -Y(z-t_i) \cdot (\alpha \cdot (z^2 - t_i^2) / 2 + \beta \cdot (z-t_i)) \\ \bar{M}_y(z, t_i) = +Y(z-t_i) \cdot (\alpha \cdot (z^3 - t_i^3) / 6 - \alpha \cdot t_i^2 (z-t_i) / 2 + \beta \cdot (z-t_i)) \\ \bar{v}'_x(z, t_i) = \frac{Y(z-t_i)}{EI_{xx}} \cdot (\alpha (z^4 - t_i^4) / 24 - \alpha \cdot t_i^3 (z-t_i) / 6 - \alpha \cdot t_i^2 (z-t_i) \\ + \beta \cdot (z-t_i)^3 / 6) \end{cases}$$

$$\bar{M}_y(z, t_i) = -Y(z, t_i) \cdot (\alpha \cdot (z^2 - t_i^2)/2 + \beta \cdot (z - t_i))$$

$$\bar{v}'_x(z, t_i) = -\frac{Y(z, t_i)}{EI_{xx}} (\alpha \cdot (z^3 - t_i^3)/6 - \alpha \cdot t_i^2 (z - t_i)/2 + \beta \cdot (z - t_i)^2)$$

$$\bar{v}_x(z, t_i) = -\frac{Y(z, t_i)}{EI_{xx}} (\alpha \cdot (z^4 - t_i^4)/24 - \alpha \cdot (z - t_i) \cdot t_i^3/6 - \alpha \cdot t_i^2 (z - t_i)^2/4 + \beta (z - t_i)^3/6)$$

### B) Flexion dans le plan principal Cyz

Nous avons vu au paragraphe I.3. que les formules relatives à la flexion dans le plan Cyz diffèrent par quelques signes de leurs homologues dans le plan Cxz.

Aussi, allons-nous nous borner à indiquer, dans ce paragraphe, comment modifier l'expression des termes de charge relatifs à la flexion dans Cxz pour obtenir leurs homologues dans Cyz.

#### a - Charge transversale $Q_y$ concentrée en t

Changer le signe de  $\bar{M}_y(z)$

#### b - Moment concentré à la cote t

Changer le signe de  $\bar{v}'_x(z)$  et  $\bar{v}_x(z)$

#### c - Densité de charge $q_y(z)$ trapézoïdale sur une zone

Changer le signe de  $\bar{M}_y(z)$

#### d - Densité de moment trapézoïdale sur une zone

Changer le signe de  $\bar{v}'_x(z)$  et  $\bar{v}_x(z)$ .

### I.7.2. - Termes de charge de torsion

Soit  $m(z)$  (resp.  $b(z)$ ) la densité (au sens large) de moment de torsion (resp. de bimoment) appliquée au tronçon considéré.

Nous avons établi, au paragraphe I.4., la relation suivante, que nous allons maintenant développer :

$$\bar{\Theta}(z) = \frac{1}{GJ_d} \int_0^z \left( \frac{1}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-u) - (z-u) \right) \cdot \left( m(u) + \frac{db}{dz}(u) \right) du$$

$\bar{\Theta}'(z)$ ,  $\bar{B}(z)$  et  $\bar{H}(z)$  se déduisent de  $\bar{\Theta}(z)$  par dérivation.

#### a - Moment de torsion $H_t$ concentré à la cote $t$

$$\text{On a } \begin{cases} m(z) = H_t \cdot \delta(z-t) \\ b(z) = 0 \end{cases}$$

Or,  $\forall f(z)$  continue en  $t$ ,  $\int_0^z f(u) \cdot \delta(u-t) du = Y(z-t) f(t)$

D'où :

$$\begin{cases} \bar{\Theta}(z) = H_t \cdot \frac{Y(z-t)}{GJ_d} \left( \frac{1}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-t) - (z-t) \right) \\ \bar{\Theta}'(z) = H_t \cdot \frac{Y(z-t)}{GJ_d} \left( \operatorname{ch} \frac{k}{l} (z-t) - 1 \right) \\ \bar{B}(z) = H_t \cdot Y(z-t) \left( -\frac{1}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-t) \right) \\ \bar{H}(z) = -H_t \cdot Y(z-t) \end{cases}$$

b - Bimoment  $B_t$  concentré à la cote t

$$\text{On a } \begin{cases} m(z) = 0 \\ b(z) = B_t \cdot \delta(z-t) \end{cases}$$

D'où :

$$\bar{\theta}(z) = \frac{B_t}{GJ_d} \int_0^z \left( \frac{1}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-u) - (z-u) \right) \cdot \delta'(u-t) \cdot du$$

$\delta'(z-t)$  est la dérivée au sens des distributions de la fonction de Dirac  $\delta(z-t)$ , caractérisée par :

$\forall f(z)$  dérivable en t,

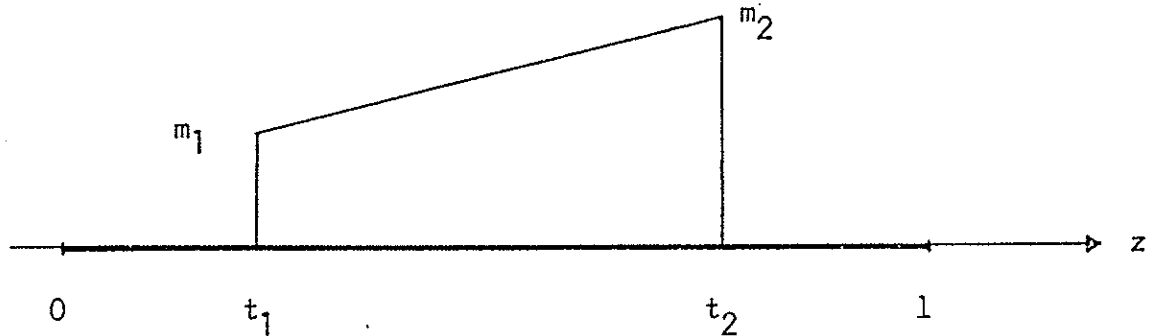
$$\begin{aligned} \int_0^z f(u) \cdot \delta'(u-t) du &= f(z) \cdot \delta(z-t) \Big|_0^z - \int_0^z f'(u) \cdot \delta(z-u) du \\ &= -f'(t) \cdot \gamma(z-t) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(z) &= -\frac{B_t}{GJ_d} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-u) - (z-u) \right) (t) \cdot \gamma(z-t) \\ &= B_t \cdot \frac{\gamma(z-t)}{GJ_d} \left( \operatorname{ch} \frac{k}{l} (z-t) - 1 \right) \\ \bar{\theta}'(z) &= B_t \cdot \frac{\gamma(z-t)}{GJ_d} \left( \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-t) \right) \\ \bar{B}(z) &= -B_t \cdot \gamma(z-t) \left( \operatorname{ch} \frac{k}{l} (z-t) \right) \\ \bar{H}(z) &= 0 \end{aligned}$$

c - Densité trapézoïdale de moment de torsion

Les notations utilisées sont indiquées sur le schéma suivant



On a :

$$m(z) = \left( \frac{m_2 - m_1}{t_2 - t_1} \cdot z + \frac{m_1 t_2 - m_2 t_1}{t_2 - t_1} \right) (Y(z-t_1) - Y(z-t_2))$$

Posons  $\alpha = \frac{m_2 - m_1}{t_2 - t_1}$  et  $\beta = \frac{m_1 t_2 - m_2 t_1}{t_2 - t_1}$

Alors  $m(z) = (\alpha \cdot z - \beta) (Y(z-t_1) - Y(z-t_2))$

Expression de  $\bar{\theta}(z)$  :

$$\bar{\theta}(z) = \frac{1}{GJ_d} \int_0^z \left( \frac{1}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-u) - (z-u) \right) \cdot (\alpha \cdot u - \beta) \cdot (Y(u-t_1) - Y(u-t_2)) \, du$$

Posons :

$$\bar{\theta}_{ti}(z) = \frac{1}{GJ_d} \int_0^z \left( z-u - \frac{1}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-u) \right) \cdot (\alpha u - \beta) \cdot Y(u-t_i) \, du$$

Nous avons alors :

$$\bar{\theta}(z) = \bar{\theta}_{t_2}(z) - \bar{\theta}_{t_1}(z)$$

Or :

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{t_i}(z) &= \frac{Y(z-t_i)}{GJ_d} \int_{t_i}^z \left( (z-u) - \frac{1}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-u) \right) \cdot (\alpha(u-z) + \beta + \alpha z) \cdot d(u-z) \\ \Leftrightarrow \bar{\theta}_{t_i}(z) &= \frac{Y(z-t_i)}{GJ_d} \int_0^{t_i-z} \left( x - \frac{1}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} x \right) (\alpha \cdot x + \beta + \alpha \cdot z) dx \\ \Leftrightarrow \bar{\theta}_{t_i}(z) &= \frac{Y(z-t_i)}{GJ_d} \left( (\alpha \cdot z + \beta) \left( \frac{1}{k^2} + \frac{(z-t_i)^2}{2} - \frac{1}{k^2} \operatorname{ch} \frac{k}{l} (z-t_i) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \alpha \cdot \left( \frac{(z-t_i)^3}{3} + \frac{1}{k^3} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-t_i) - (z-t_i) \frac{1}{k^2} \operatorname{ch} \frac{k}{l} (z-t_i) \right) \right) \end{aligned}$$

Expression de  $\bar{\theta}'(z)$  :

Les fonctions  $\bar{\theta}_{t_i}(z)$  étant continues et dérivables sur  $\bar{\theta}'(z)$  s'obtient simplement par dérivation de l'expression de  $\bar{\theta}(z)$ .

$$\bar{\theta}'(z) = \bar{\theta}'_{t_2}(z) - \bar{\theta}'_{t_1}(z)$$

avec, tous calculs faits :

$$\begin{aligned} \bar{\theta}'_{t_i}(z) &= \frac{\partial \bar{\theta}_{t_i}}{\partial z}(z) = \frac{Y(z-t_i)}{GJ_d} \left( \beta \cdot \left( (z-t_i) - \frac{1}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-t_i) \right) \right. \\ &\quad \left. - \alpha \cdot \left( \frac{1}{k^2} \left( \operatorname{ch} \frac{k}{l} (z-t_i) - 1 \right) - \frac{z^2 - t_i^2}{2} + \frac{1}{k} t_i \operatorname{sh} \frac{k}{l} (z-t_i) \right) \right) \end{aligned}$$

Expression de  $\bar{B}(z)$  :

Nous avons défini  $\bar{B}(z)$  par la relation suivante :

$$\bar{B}(z) = -EJ_{\omega} \cdot \bar{\theta}''(z)$$

$$\text{Posons } \bar{B}_{t_i}(z) = -EJ\omega \cdot \bar{\Theta}''_{t_i}(z)$$

(On peut vérifier sur l'expression de  $\bar{\Theta}'_{t_i}(z)$  que  $\bar{\Theta}'_{t_i}(z)$  est continue et dérivable sur  $(0,1)$ )

$$\text{Nous aurons alors } \bar{B}(z) = \bar{B}_{t_2}(z) - \bar{B}_{t_1}(z)$$

avec, tous calculs faits :

$$\bar{B}_{t_i}(z) = Y(z-t_i) \frac{l^2}{k^2} \left( \beta \left( \text{ch} \frac{k}{l} (z-t_i) - 1 \right) - \alpha (z-t_i) \text{ch} \frac{k}{l} (z-t_i) - \frac{1}{k} \text{sh} \frac{k}{l} (z-t_i) \right)$$

$$\left( \text{rappelons que } k^2 = l^2 \cdot \frac{GJ_d}{EJ\omega} \right)$$

Expression de  $\bar{H}(z)$  :

$$\text{Nous avons posé } \bar{H}(z) = GJ_d \cdot \bar{\Theta}'(z) - EJ\omega \cdot \bar{\Theta}'''(z)$$

$$\text{Avec des notations évidentes, nous aurons : } \bar{H}(z) = \bar{H}_{t_2}(z) - \bar{H}_{t_1}(z)$$

tous calculs faits, on trouve :

$$\bar{H}_{t_i}(z) = Y(z-t_i) \left( \frac{\alpha}{2} (z^2 - t_i^2) + \beta (z-t_i) \right)$$

d - Densité trapézoïdale de bimoment

Le mode de calcul des fonctions  $\bar{\Theta}(z)$ ,  $\bar{\Theta}'(z)$ ,  $\bar{B}(z)$  et  $\bar{H}(z)$  correspondant à ce chargement est analogue à celui que nous venons de développer pour une densité trapézoïdale de moment de torsion. Aussi ne donnerons-nous que les formules finales, sans indiquer les calculs intermédiaires.



$$\bar{\theta}_{t_i}(z) = \frac{Y(z-t_i)}{\omega J_d} \cdot \left( \beta \cdot \left( z-t_i - \frac{1}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{1} (z-t_i) \right) - \alpha \cdot \left( \frac{1}{k^2} \left( \operatorname{ch} \frac{k}{1} (z-t_i) - \frac{z^2 - t_i^2}{2} + \frac{1}{k} t_i \operatorname{sh} \frac{k}{1} (z-t_i) \right) \right) \right)$$

$$\bar{\theta}'_{t_i}(z) = \frac{Y(z-t_i)}{\omega J_d} \cdot \left( \beta \cdot \left( \operatorname{ch} \frac{k}{1} (z-t_i) - 1 \right) - \alpha \cdot \left( z-t_i \operatorname{ch} \frac{k}{1} (z-t_i) - \frac{1}{k} \operatorname{sh} \frac{k}{1} (z-t_i) \right) \right)$$

$$\bar{B}_{t_i}(z) = - Y(z-t_i) \frac{1}{k} \left( \beta \cdot \operatorname{sh} \frac{k}{1} (z-t_i) + \alpha \cdot \left( t_i \operatorname{sh} \frac{k}{1} (z-t_i) - \frac{1}{k} (1 - \operatorname{ch} \frac{k}{1} (z-t_i)) \right) \right)$$

$$\bar{H}_{t_i}(z) = 0$$

### I.7.3. - Termes de charge de compression-traction

Soit  $j$  l'indice d'un des éléments de contreventement étudié ( $1 \leq j \leq m$ )

Soit  $p_j(z)$  la densité (au sens large) de chargement longitudinal appliqué au centre de gravité de l'élément  $j$ , à la cote  $z$ .

Nous avons établi, dans le paragraphe I.5., les relations suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} \bar{N}_j(z) = - \int_0^z p_j(t) dt \\ \bar{u}_j(z) = \frac{1}{E_j S_j} \int_0^z \bar{N}_j(t) dt \end{array} \right.$$

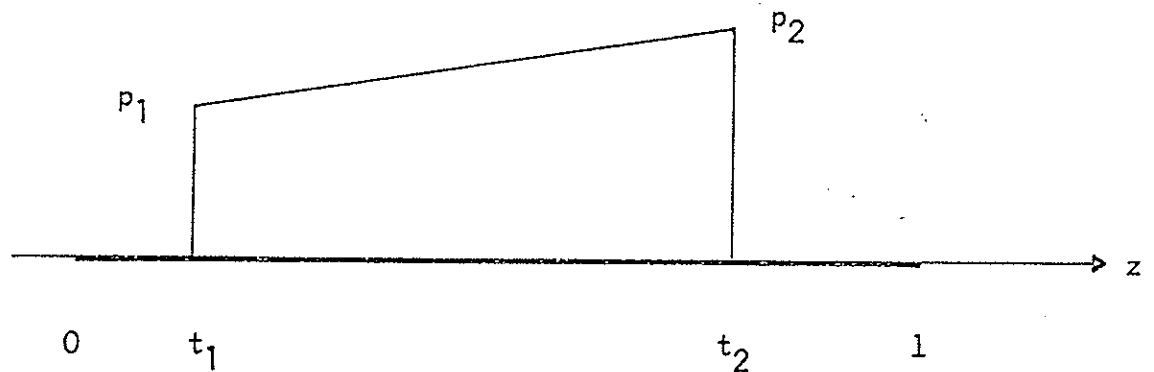
a - Charge longitudinale  $P_j$  concentrée à la cote  $t$

On a alors  $p_j(z) = P_j \cdot \delta(z-t)$

D'où :

$$\begin{cases} \bar{N}_j(z) = -P_j \cdot Y(z-t) \\ \bar{u}_j(z) = -\frac{P_j}{E_j S_j} (z-t) \cdot Y(z-t) \end{cases}$$

b - Densité trapézoïdale d'effort longitudinal



$$p_j(z) = (\alpha \cdot z + \beta) \cdot (Y(z-t_1) - Y(z-t_2))$$

avec  $\alpha = \frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1}$  et  $\beta = \frac{p_1 t_2 - p_2 t_1}{t_2 - t_1}$

Par intégration, on obtient :

$$\begin{cases} \bar{N}_j(z) = \bar{N}_j(z, t_2) - \bar{N}_j(z, t_1) \\ \bar{u}_j(z) = \bar{u}_j(z, t_2) - \bar{u}_j(z, t_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{N}_j(z, t_i) = Y(z-t_i) \left( \alpha \cdot \frac{z^2 - t_i^2}{2} + \beta \cdot (z-t_i) \right) \\ \bar{u}_j(z, t_i) = \frac{Y(z-t_i)}{E_j S_j} \left( \alpha \cdot \frac{z^3 - t_i^3}{6} - \alpha \cdot t_i^2 (z-t_i) / 2 + \beta \cdot \frac{(z-t_i)^2}{2} \right) \end{cases}$$

#### I.7.4. - Remarques sur les termes de charge

a) Les termes de charge correspondant à un chargement complexe, formé par la superposition de différents chargements élémentaires étudiés ci-dessus, s'obtiennent par addition des termes de charge correspondant à ces chargements élémentaires (principe de superposition).

b) Les formules relatives aux cas de densités trapézoïdales de charge sont paramétrées en  $\alpha$  et  $\beta$ . On peut remarquer qu'il suffit d'annuler  $\alpha$  dans ces expressions pour obtenir les formules relatives à une densité uniforme.