

II - TRAITEMENT MATRICIEL DES SINGULARITES ET DISCONTINUITES.

Nous avons, dans le chapitre précédent, établi l'expression de la matrice transfert globale d'un ensemble de refends et de profils ouverts réguliers travaillant conjointement en flexion et torsion, et pouvant se comporter indépendamment les uns des autres en compression-traction.

Le présent chapitre va nous permettre de prendre en compte matriciellement trois types de singularités couramment rencontrées en calcul de contreventement :

- Présence de linteaux à certains niveaux, reliant deux éléments de contreventement distincts, ou deux points d'un même élément.
- Discontinuité géométrique ou mécanique de la section transversale totale.
- Fondation sur sol élastique.

II.1. - Prise en compte des linteaux.

Le rôle des linteaux est essentiel dans le calcul des contreventements :

- Ils augmentent, souvent considérablement, la rigidité des structures, en s'opposant à leur déformation.

- Ils introduisent des termes de couplage liant les fonctionnements de flexion, torsion et compression-traction.

Nous allons, au cours de ce paragraphe, introduire la matrice-transfert de passage de niveaux à linteaux, reliant le vecteur état de la section située juste au-dessus des linteaux à celui de la section situé juste au-dessous.

Soient :

t : La cote de la section étudiée, comportant un ou plusieurs linteaux.

n : le nombre des linteaux dans la section t .

k : un quelconque de ces linteaux. $1 \leq k \leq n$

m : le nombre d'éléments de contreventement (refends ou profils ouverts) composant la section t .

(On supposera ici que ces éléments ne présentent pas de discontinuité géométrique ou mécanique à la cote t)

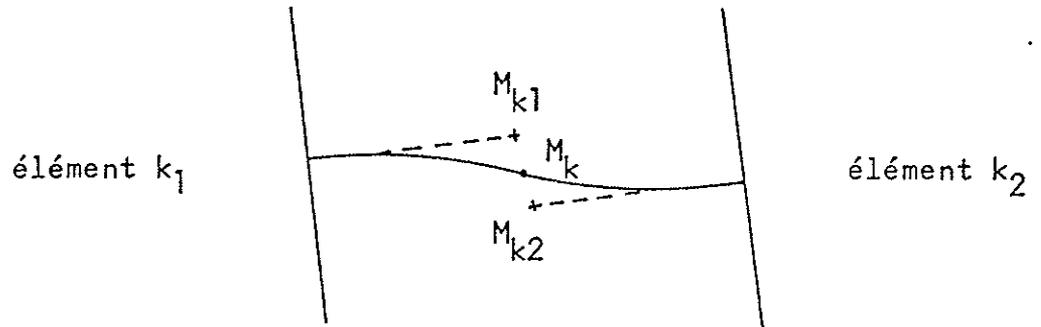
k_1 et k_2 : les numéros des deux éléments de contreventement reliés par le linteau k (éventuellement $k_1 = k_2$). Par convention, l'encastrement sur k_1 sera l'origine du linteau et celui sur k_2 , son extrémité.

$G_{k_1} (x_{G_{k_1}}, y_{G_{k_1}})$ et $G_{k_2} (x_{G_{k_2}}, y_{G_{k_2}})$ les centres de gravités des éléments

k_1 et k_2 affectés de leurs coordonnées cartésiennes exprimées dans le repère principal Cxy de la section globale.

M_k le point de milieu de travée* du linteau k .

M_{k_1} (resp. M_{k_2}) le point M_k , considéré comme appartenant à l'élément (resp. k_2) après coupure du linteau en M_k .



$x_{k_1}, y_{k_1}, \omega_{k_1}$: (resp. $x_{k_2}, y_{k_2}, \omega_{k_2}$) les coordonnées généralisées principales de M_{k_1} (resp. M_{k_2}). Le qualificatif "principal" s'entend par rapport à la section complète du contreventement, et non par rapport aux seuls éléments k_1 ou k_2 = cf. I.2.

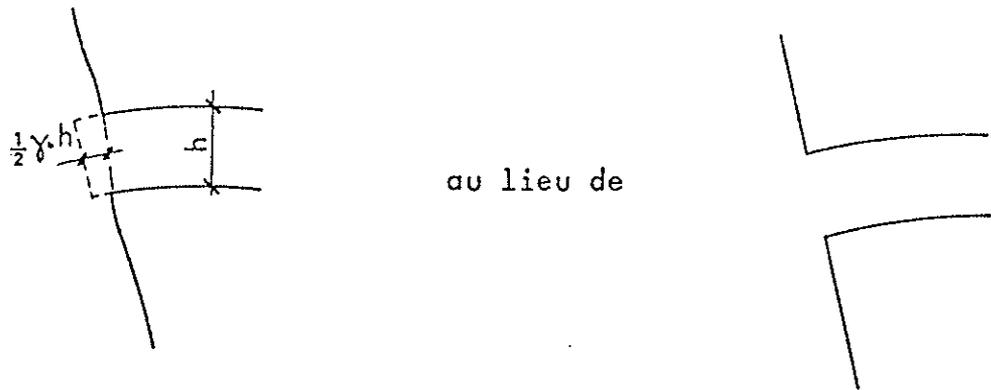
Notons que :

$$\left| \begin{array}{l} x_{k_1} = x_{k_2} = x_k \\ y_{k_1} = y_{k_2} = y_k \\ \omega_{k_1} \neq \omega_{k_2} \end{array} \right.$$

K_k : La raideur du linteau k . K_k peut tenir compte ou non des déformations d'effort tranchant du linteau. On peut également calculer K_k en utilisant la correction proposée par MICHAEL (Réf. 29) pour tenir compte de la déformation des voiles au niveau des encastremets. (Cette correction, dont nous reparlerons, consiste à augmenter la portée du linteau d'une fraction $\gamma \cdot h$ de sa hauteur)

* Plus généralement, ce point est le point d'inflexion (i.e. de moment nul) du linteau.

Déformation localisée des encastrements:



Nous noterons T_k l'effort tranchant dans le linteau k .
Par convention, nous supposons :

$$\left| \begin{array}{ll} T_k > 0 & \text{si } u(M_{k_1}, t) > u(M_{k_2}, t) \\ T_k < 0 & \text{si } u(M_{k_1}, t) < u(M_{k_2}, t) \end{array} \right.$$

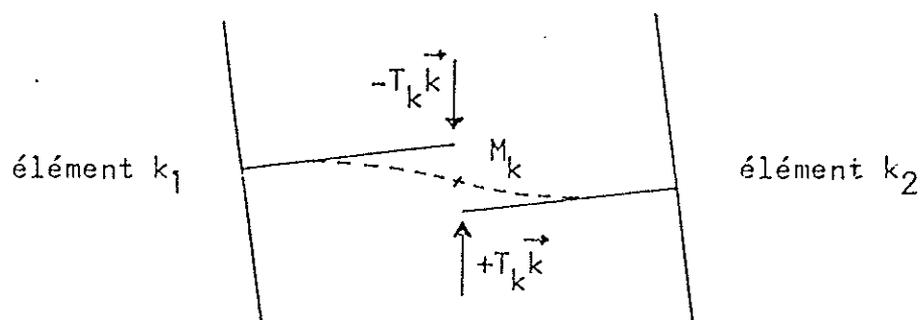
D'où l'expression algébrique de T_k :

$$T_k(t) = K_k \cdot (u(M_{k_1}, t) - u(M_{k_2}, t))$$

Une coupure effectuée en M_k libère deux efforts verticaux hyperstatiques opposés qui, avec nos conventions, seront :

$$\left| \begin{array}{l} -T_k \vec{k} \text{ en } M_{k_1} \\ +T_k \vec{k} \text{ en } M_{k_2} \end{array} \right.$$

(\vec{k} est le vecteur unitaire de l'axe vertical \vec{Cz})



L'invariabilité des distances horizontales mutuelles des éléments de contreventement entraîne que les bords des éléments k_1 et k_2 sont parallèles, et que par suite, M_k est point de moment nul : la coupure M_k ne libère pas de moment hyperstatique.

Les deux efforts verticaux $-T_k$ et T_k appliquent à la section les facteurs statiques suivants :

$$\begin{aligned}
 \text{- Un moment : } \quad \Delta \vec{M}_k &= -T_k \vec{k} \wedge \overrightarrow{M_{k_1} G_{k_1}} + T_k \vec{k} \wedge \overrightarrow{M_{k_2} G_{k_2}} \\
 &= T_k \vec{k} \wedge \overrightarrow{G_{k_1} G_{k_2}} \\
 \text{- Un bimoment : } \quad \Delta B_k &= T_k \cdot (\omega_{k_2} - \omega_{k_1}) \\
 \text{- Deux efforts normaux : } \quad \Delta \vec{N}_{k_1} &= -T_k \vec{k} \text{ en } G_{k_1} \\
 \quad \Delta \vec{N}_{k_2} &= +T_k \vec{k} \text{ en } G_{k_2}
 \end{aligned}$$

Avec nos conventions du paragraphe I.2., les sauts d'efforts internes au passage de la section t , dus à l'action résistante des n linteaux de cette section, s'expriment par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned}
 M_x(t^+) &= M_x(t^-) - \sum_k \Delta M_{xk} \\
 M_y(t^+) &= M_y(t^-) - \sum_k \Delta M_{yk} \\
 B(t^+) &= B(t^-) - \sum_k \Delta B_k \\
 N_j(t^+) &= N_j(t^-) - \sum_k \Delta N_{k_1} \cdot \delta_j^{k_1} - \sum_k \Delta N_{k_2} \cdot \delta_j^{k_2}
 \end{aligned} \right.$$

$$(\delta_i^j \text{ symbole de Kronecker}) \quad (1 \leq j \leq m)$$

Soit encore :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned}
 M_x(t^+) &= M_x(t^-) + \sum_k (y_{G_{k_2}} - y_{G_{k_1}}) \cdot T_k \\
 M_y(t^+) &= M_y(t^-) - \sum_k (x_{G_{k_2}} - x_{G_{k_1}}) \cdot T_k
 \end{aligned} \right.$$

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} B(t^+) = B(t^-) - \sum_k (\omega_{k2} - \omega_{k1}) \cdot T_k \\ N_j(t^+) = N_j(t^-) + \sum_k \varepsilon_k^j \cdot T_k \end{array} \right. \quad 1 \leq j \leq m$$

Avec $\varepsilon_k = +1$ (resp. -1) si le linteau k a son origine (resp. extrémité) encastree sur l'élément j , et 0 dans les autres cas.

Or $T_k = K_k \cdot (u(M_{k1}, t) - u(M_{k2}, t))$

On sait de plus que, pour $i = 1$ ou 2 :

$$\begin{aligned} u(M_{ki}, t) &= u_{ki}(t) - (x_{ki} - x_{Gki}) \cdot v'_x(t) \\ &\quad - (y_{ki} - y_{Gki}) \cdot v'_y(t) \\ &\quad - \omega_{ki} \cdot \theta'(t) \end{aligned}$$

Rappelons que $u_{ki}(z)$ est le déplacement longitudinal d'ensemble de l'élément k_i à la cote z , et que c' est la composante de numéro $11 + 2k_i$ de $E(z)$.

D'autre part $x_{k1} = x_{k2}$
 $y_{k1} = y_{k2}$

D'où l'expression de $T_k(t)$ en fonction de $u_{k1}(t)$, $u_{k2}(t)$, $v'_x(t)$, $v'_y(t)$ et $\theta'(t)$:

$$\begin{aligned} T_k(t) &= K_k \cdot (u_{k1}(t) - u_{k2}(t) - (x_{Gk2} - x_{Gk1}) \cdot v'_x(t) \\ &\quad - (y_{Gk1} - y_{Gk2}) \cdot v'_y(t) + (\omega_{k2} - \omega_{k1}) \cdot \theta'(t)) \end{aligned}$$

faute de copie ??

On constate alors que tous les sauts d'efforts internes, explicités en (1), sont combinaisons linéaires de $v'_x(t)$, $v'_y(t)$, $\theta'(t)$ et $u_j(t)$ ($1 \leq j \leq m$).

Or, les $v'_x(t)$, $v'_y(t)$, $\theta'(t)$ et $u_j(t)$ étant continus en t , leur valeur en t est aussi leur valeur en t^- . On aura donc finalement

$$M_x(t^+) = M_x(t^-) - v'_x(t^-) \cdot \sum_k K_k (y_{Gk2} - y_{Gk1}) (x_{Gk2} - x_{Gk1}) \\ - v'_y(t^-) \cdot \sum_k K_k (y_{Gk2} - y_{Gk1})^2 \\ + \theta'(t^-) \cdot \sum_k K_k (y_{Gk2} - y_{Gk1}) (\omega_{k2} - \omega_{k1}) \\ + \sum_j \sum_k K_k (y_{Gk2} - y_{Gk1}) \cdot \epsilon_k^j \cdot u_j(t^-)$$

$$M_y(t^+) = M_y(t^-) + v'_x(t^-) \cdot \sum_k K_k (x_{Gk2} - x_{Gk1})^2 \\ + v'_y(t^-) \cdot \sum_k K_k (x_{Gk2} - x_{Gk1}) (y_{Gk2} - y_{Gk1}) \\ - \theta'(t^-) \cdot \sum_k K_k (x_{Gk2} - x_{Gk1}) (\omega_{k2} - \omega_{k1}) \\ - \sum_j \sum_k K_k (x_{Gk2} - x_{Gk1}) \cdot \epsilon_k^j \cdot u_j(t^-)$$

$$B(t^+) = B(t^-) + v'_x(t^-) \cdot \sum_k K_k (\omega_{k2} - \omega_{k1}) (x_{Gk2} - x_{Gk1}) \\ + v'_y(t^-) \cdot \sum_k K_k (\omega_{k2} - \omega_{k1}) (y_{Gk2} - y_{Gk1}) \\ - \theta'(t^-) \cdot \sum_k K_k (\omega_{k2} - \omega_{k1})^2 \\ - \sum_j \sum_k K_k (\omega_{k2} - \omega_{k1}) \cdot \epsilon_k^j \cdot u_j(t^-)$$

$$N_j(t^+) = N_j(t^-) - v'_x(t^-) \cdot \sum_k K_k \cdot \epsilon_k^j (x_{Gk2} - x_{Gk1}) \\ - v'_y(t^-) \cdot \sum_k K_k \cdot \epsilon_k^j (y_{Gk2} - y_{Gk1}) \\ + \theta'(t^-) \cdot \sum_k K_k \cdot \epsilon_k^j (\omega_{k2} - \omega_{k1}) \\ + \sum_k K_k \epsilon_k^j \cdot \sum_{i=1}^m \epsilon_k^i \cdot u_i(t^-)$$

Avec des notations évidentes, et sous une forme condensée :

$$M_x(t^+) = M_x(t^-) + m_x^x \cdot v'_x(t^-) + m_x^y \cdot v'_y(t^-) + m_x^\theta \cdot \Theta'(t) \\ + \sum_{j=1}^m m_x^j \cdot u_j(t^-)$$

$$M_y(t^+) = M_y(t^-) + m_y^x \cdot v'_x(t^-) + m_y^y \cdot v'_y(t^-) + m_y^\theta \cdot \Theta'(t^-) \\ + \sum_{j=1}^m m_y^j \cdot u_j(t^-)$$

$$B(t^+) = B(t^-) + b^x \cdot v'_x(t^-) + b^y \cdot v'_y(t^-) + b^\theta \cdot \Theta'(t^-) \\ + \sum_{j=1}^m b^j \cdot u_j(t^-)$$

$$N_j(t^+) = N_j(t^-) + n_j^x \cdot v'_x(t^-) + n_j^y \cdot v'_y(t^-) + n_j^\theta \cdot \Theta'(t^-) \\ + \sum_{j=1}^m n_j^i \cdot u_i(t^-)$$

Tous les autres paramètres du vecteur état $E(z)$ restant inchangés au passage du niveau t , $E(t^+)$ et $E(t^-)$ sont reliés par la relation matricielle de la page suivante.

La matrice carrée $(13 + 2m) \times (13 + 2m)$ intervenant dans cette relation est la matrice transfert de passage de niveau à linteaux de cote t .

II.2. - Discontinuité de section.

Nous allons étudier dans ce paragraphe la transformation que subit le vecteur état $E(z)$ au passage d'une discontinuité brusque des caractéristiques de la section globale du système de contreventement.

Cette discontinuité de section peut revêtir différentes formes :

Discontinuité géométrique : Par exemple, changement de géométrie d'un ou plusieurs des éléments de contreventement, disparition d'un ou plusieurs éléments de contreventement ...

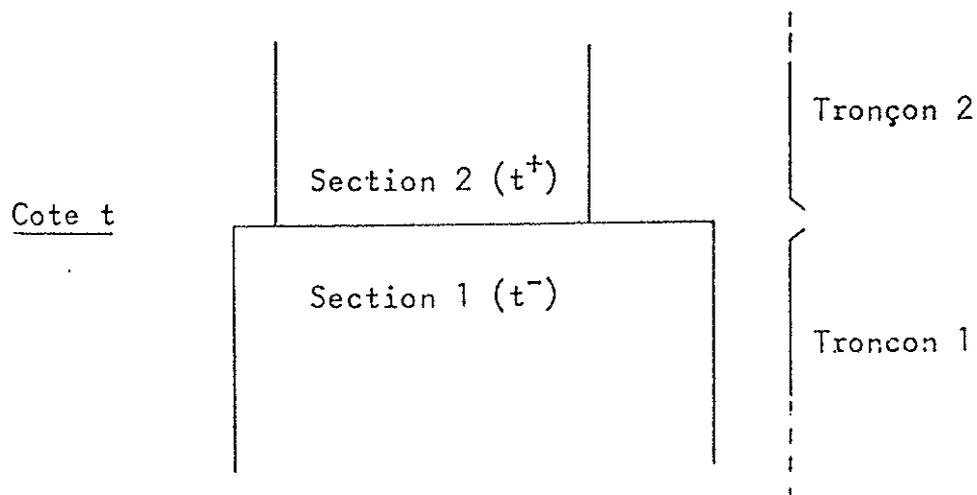
Discontinuité mécanique : Modification des caractéristiques mécaniques E et G de certains des éléments de contreventement.

Discontinuité géométrique et mécanique : Concomitance des deux types de discontinuité précédents.

Nous allons étudier directement le 3ème cas, qui est le cas le plus général. Les formules trouvées s'appliqueront évidemment aussi aux deux premiers cas.

Soit t la cote de la section étudiée, présentant une discontinuité géométrique et mécanique.

Nous donnerons l'indice 1 (resp. 2) aux grandeurs relatives à la section 1 (resp. 2) située juste au-dessous (resp. dessus) de t .



En particulier, soient :

C_1 (resp. C_2) le centre de flexion de la section 1 (resp. 2)
(Nous rappelons que ce centre de flexion se calcule sur la section sans linteaux : cf. chap. I).

$C_{1x_1y_1}$ (resp. $C_{2x_2y_2}$) le repère principal de la section 1 (resp. 2), rapporté au centre de flexion C_1 (resp. C_2).

G_{j1}, C_{j1} (resp. G_{j2}, C_{j2}) les centres de gravité et de flexion de l'élément de contreventement j , avant (resp. après) la discontinuité ($1 \leq j \leq m$).

Remarques :

1 - Nous supposons pour le moment qu'il n'y a pas de disparition ni d'apparition d'éléments de contreventement à la cote t : le nombre d'éléments de contreventement, m , est donc le même dans les sections 1 et 2.

2 - Nous supposons que le niveau t n'est pas un niveau à linteaux.

Ces deux hypothèses vont considérablement simplifier le raisonnement. Nous pourrons nous en affranchir dans le chapitre suivant par un simple raisonnement logique, et sans calculs supplémentaires.

Nous allons séparer l'étude en deux parties, l'une concernant les composantes géométriques de $E(z)$, l'autre les efforts internes.

II.2.1. - Composantes géométriques

Ce sont les fonctions :

$v_x(z), v_y(z)$: Déplacements horizontaux du centre de flexion de la section z , mesurés suivant les directions principales de cette section.

$v'_x(z), v'_y(z)$: Dérivées/z de $v_x(z)$ et $v_y(z)$.

$\theta(z), \theta'(z)$: Angle de rotation de la section et dérivée/z.

$u_j(z)$: Déplacement longitudinal d'ensemble de l'élément de contreventement j à la cote z . (cf. p.)

Nous allons, en trois paragraphes successifs, établir les formules de transformation de $v_x(t), v_y(t)$ et $\theta(t)$, puis de $v'_x(t), v'_y(t)$ et $\theta'(t)$, puis des $u_j(t)$.

a - Transformation de $v_x(t), v_y(t), \theta(t)$

Pour des raisons évidentes de continuité de la matière, il n'y a pas, en un point donné, de discontinuité des déplacements horizontaux. On en déduit directement :

$$(I) \quad \theta(t^+) = \theta(t^-)$$

Si on note $\xi_i(M)$ et $\eta_i(M)$ les deux composantes de la flèche horizontale d'un point M de la section t , mesurées dans le repère principal $C_i x_i y_i$ ($i = 1$ ou 2), on a :

$$\left| \begin{array}{l} \xi_2(M) = \xi_2(C_1) - (y_2(M) - y_2(C_1)) \cdot \theta(t) \\ \eta_2(M) = \eta_2(C_1) + (x_2(M) - x_2(C_1)) \cdot \theta(t) \end{array} \right.$$

(Déplacement d'un point M soumis à une translation $(\xi_2(C_1), \eta_2(C_1))$ et à une rotation θ autour de C_1 , avec θ petit)

Si on prend M en C_2 :

$$\left| \begin{array}{l} \xi_2(C_2) = v_x(t^+) = \xi_2(C_1) - (y_2(C_2) - y_2(C_1)) \cdot \theta(t) \\ \eta_2(C_2) = v_y(t^+) = \eta_2(C_1) + (x_2(C_2) - x_2(C_1)) \cdot \theta(t) \end{array} \right.$$

Or :

$$\begin{cases} \xi_2(C_1) = +\xi_1(C_1) \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + \eta_1(C_1) \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \\ \eta_2(C_1) = -\xi_1(C_1) \sin(\alpha_2 - \alpha_1) + \eta_1(C_1) \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \end{cases}$$

avec $\alpha_i = (\vec{C}_i x_i, \vec{OX})$ ((OXY) repère général)

D'où, en remarquant que $\xi_1(C_1) = v_x(t^-)$ et $\eta_1(C_1) = v_y(t^-)$:

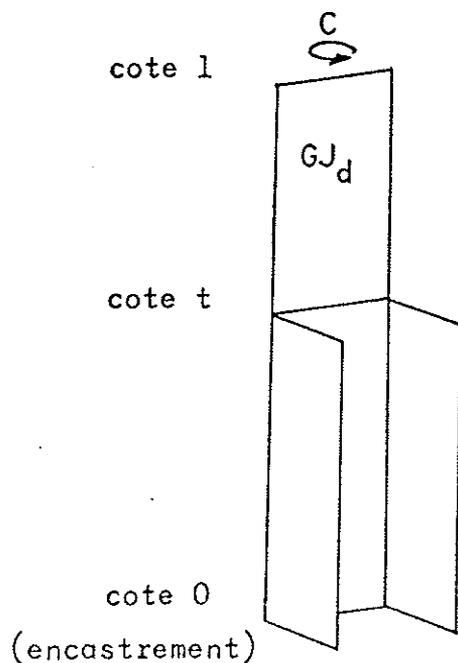
$$(II) \quad \begin{cases} v_x(t^+) = +v_x(t^-) \cos(\alpha_2 - \alpha_1) + v_y(t^-) \sin(\alpha_2 - \alpha_1) + y_2(C_1) \cdot \theta \\ v_y(t^+) = -v_y(t^-) \sin(\alpha_2 - \alpha_1) + v_x(t^-) \cos(\alpha_2 - \alpha_1) - x_2(C_1) \cdot \theta \end{cases}$$

Les valeurs de α_1 , α_2 , $y_2(C_1)$ et $x_2(C_1)$ sont facilement calculables à partir des caractéristiques géométriques des sections 1 et 2.

b - Transformation de $v'_x(t)$, $v'_y(t)$, $\theta'(t)$

Il existe des cas particuliers où il n'y a pas forcément continuité des dérivées premières des déplacements en un point donné de la section t .

Considérons en effet l'exemple suivant :



$$\text{On a } \theta'(t^+) = \frac{C}{GJ_d} \quad (\text{torsion pure})$$

Or, $\theta'(t^-)$ ne dépend que de C et des caractéristiques du tronçon (0, t), mais est indépendant de GJ_d .
On a donc, la plupart du temps :

$$\theta'(t^+) \neq \theta'(t^-)$$

Nous allons établir, dans la démonstration qui suit, que ces cas particuliers où il existe une discontinuité des dérivées des déplacements correspondent forcément à des structures du type faisceau de voiles plans, qui ont déjà été écartées au paragraphe I.6.2.

(Notons auparavant que nous avons, dans le chapitre I, supposé nulles les déformations d'effort tranchant dans les voiles : par conséquent, en flexion pure, on a toujours continuité de $v'_x(z)$ et $v'_y(z)$ au passage de la cote t .)

Rapportons la section de cote t à un repère quelconque Ωxy . Soient :

$\xi'(z), \eta'(z)$: dérivées/ z des composantes dans Ωxy du déplacement horizontal de Ω à la cote z .

j : un quelconque des éléments de contreventement, de section géométrique S_{j_1} pour $z < t$ et S_{j_2} pour $z > t$.

$M_0, M(s)$: deux points de $S_{j_1} \cap S_{j_2}$. (s est une abscisse curviligne à partir de M_0)

$x(s), y(s), \omega(s)$: coordonnées généralisées de $M(s)$, calculées dans Ωxy , avec Ω pour pôle des aires sectorielles, et M_0 pour point initial.

Après déformation, la différence de cote de deux points $M(s_1)$ et $M(s_2)$, au niveau z , est :

$$u(M_1, z) - u(M_2, z) = -\xi'(z) \cdot (x(s_1) - x(s_2)) - \eta'(z) \cdot (y(s_1) - y(s_2)) - \theta'(z) \cdot (\omega(s_1) - \omega(s_2)).$$

($M(s_1)$ et $M(s_2)$ appartiennent au même élément j).

Pour des raisons de continuité de matière :

$$u(M_1, t^-) - u(M_2, t^-) = u(M_1, t^+) - u(M_2, t^+) \quad \forall M_1, M_2$$

$$\Leftrightarrow \forall s_1, s_2, \quad (x(s_1) - x(s_2)) \cdot (\xi'(t^-) - \xi'(t^+)) \\ + (y(s_1) - y(s_2)) \cdot (\eta'(t^-) - \eta'(t^+)) \\ + (\omega(s_1) - \omega(s_2)) \cdot (\theta'(t^-) - \theta'(t^+)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall s_1, s_2 \quad (x(s_1) - x(s_2)) \cdot \Delta \xi'(t) + (y(s_1) - y(s_2)) \cdot \Delta \eta'(t) \\ + (\omega(s_1) - \omega(s_2)) \cdot \Delta \theta'(t) = 0$$

Cas général : $\omega(s_1) - \omega(s_2), x(s_1) - x(s_2), y(s_1) - y(s_2)$

sont linéairement indépendants.

L'équation ci-dessus est donc équivalente à :

$$\Delta \xi'(t) = \Delta \eta'(t) = \Delta \theta'(t) = 0$$

Cas particuliers des voiles plans en faisceau :

$$\exists k_x, k_y / \omega(s_1) - \omega(s_2) = k_x(x(s_1) - x(s_2)) + k_y(y(s_1) - y(s_2))$$

(Il n'y a pas de gauchissement, la section reste plane)

Après transformation, on trouve que l'équation ci-dessus est équivalente au système suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \Delta \xi'(t) + k_x \cdot \Delta \theta'(t) = 0 \\ \Delta \eta'(t) + k_y \cdot \Delta \theta'(t) = 0 \end{array} \right.$$

Or, dans les structures du type faisceau de voiles plans, EJ_{ω} est nul. Par conséquent, $\theta'(z) = \frac{H}{GJ_d}(z)$

($H(z)$ moment de torsion en z).

$\Delta \theta'(t)$ est donc imposé par les variations de $H(z)$ et GJ_d en t . On en déduit les valeurs de $\Delta \xi'(t)$ et $\Delta \eta'(t)$ qui sont non nulles.

Ce cas particulier des voiles plans en faisceau a été écarté au paragraphe I.6.2. Nous supposons donc dans la suite que

$$\Delta \xi'(t) = \Delta \eta'(t) = \Delta \theta'(t) = 0$$

On peut dans ce cas refaire pour $v'_x(t)$, $v'_y(t)$, $\theta'(t)$ le raisonnement du paragraphe (a) précédent et on trouve :

$$(III) \begin{cases} v'_x(t^+) = +v'_x(t^-)\cos(\alpha_2 - \alpha_1) + v'_y(t^-)\sin(\alpha_2 - \alpha_1) + y_2(C_1) \cdot \theta'(t^-) \\ v'_y(t^+) = -v'_x(t^-)\sin(\alpha_2 - \alpha_1) + v'_y(t^-)\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - x_2(C_1) \cdot \theta'(t^-) \\ \theta'(t^+) = \theta'(t^-) \end{cases}$$

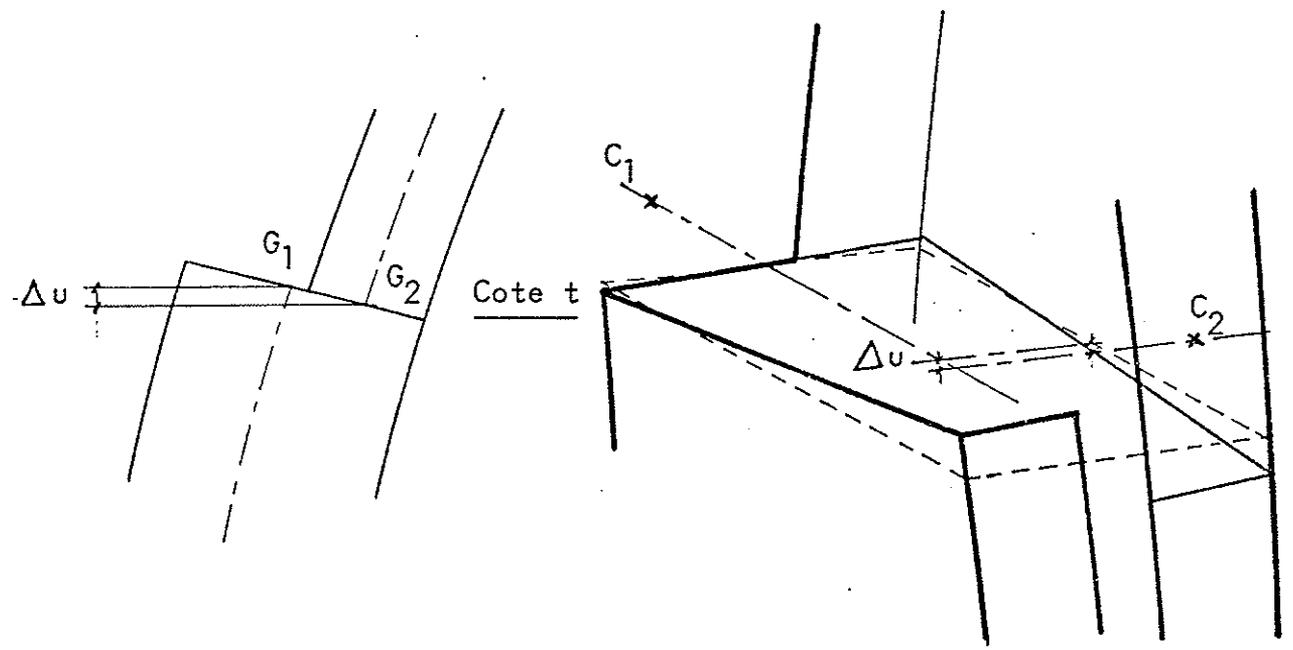
c - Transformation des $u_j(t)$

Dans le cas général, il n'y a pas conservation, au passage de la cote t , du déplacement longitudinal d'ensemble $u_j(t)$ de l'élément de contreventement j .

Il y a en effet discontinuité de $u_j(z)$ dans les deux cas courants suivants :

- La position du centre de gravité de j change au passage de la discontinuité : fig. 1.
- La position du centre de flexion de la section totale change au passage de la discontinuité : fig. 2 (pour

plus de clarté, on a dans ce schéma réduit le système de contreventement à un seul élément : le centre de flexion de la section totale est confondu avec le centre de flexion de l'élément unique. Le saut de déplacement longitudinal d'ensemble $\Delta u_j(t)$ est du au gauchissement de la section t).



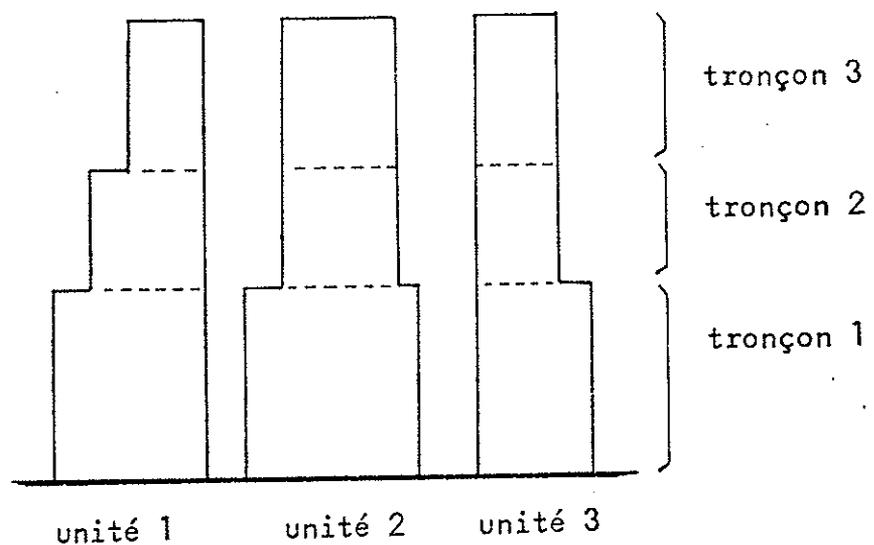
Vocabulaire :

Nous appellerons "unité de contreventement j" la sous-structure formée par l'empilement, tronçon après tronçon, des éléments de contreventement de numéro j.

$$(1 \leq j \leq m)$$

La structure ci-dessous est ainsi constituée de 3 unités de contreventement : Dans chacun des 3 tronçons, chacune des 3 unités de

contreventement est représentée par un élément de contreventement.



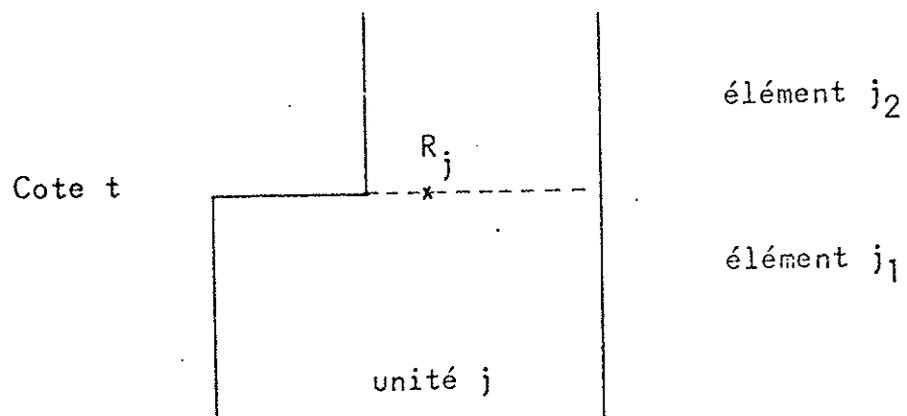
Soient :

t : La cote de la section de discontinuité.

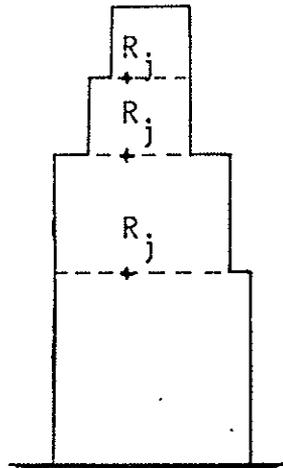
j : Une unité de contreventement quelconque. $1 \leq j \leq m$
 Cette unité est représentée par l'élément j_1 pour $z < t$ et j_2 pour $z > t$.

G_{j_1} : (resp. G_{j_2}) le centre de gravité de l'élément j_1
 (resp. j_2).

R_j : Est un point donné, appartenant à la fois à la section de j_1 et à celle de j_2 (cf. fig. ci-dessous), et dont on connaît l'abscisse et l'ordonnée dans le repère général (OXY), et les aires sectorielles principales avant et après la discontinuité de section de cote t .



Dans la pratique, on choisira un seul et même point R_j pour toutes les discontinuités de section de l'unité j , ce point appartenant en projection à chacun des éléments constituant successivement l'unité j :



On donnera alors les valeurs des aires sectorielles principales de R_j dans chacun des tronçons de l'unité j .

Ce point R_j , attaché à l'unité j , sera appelé "point de référence de l'unité j ".

En indiquant par 1 (resp. 2), les coordonnées généralisées calculées dans le repère principal de la section t^- (resp. t^+), on a :

$$\left| \begin{aligned} u_j(R_j, t^-) &= u_j(t^-) - \xi_1'(C_1) \cdot (x_1(R_j) - x_1(G_{j_1})) \\ &\quad - \eta_1'(C_1) \cdot (y_1(R_j) - y_1(G_{j_1})) - \omega_1(R_j) \cdot \theta'(t) \\ u_j(R_j, t^+) &= u_j(t^+) - \xi_2'(C_2) \cdot (x_2(R_j) - x_2(G_{j_2})) \\ &\quad - \eta_2'(C_2) \cdot (y_2(R_j) - y_2(G_{j_2})) - \omega_2(R_j) \cdot \theta'(t) \end{aligned} \right.$$

(Dans les membres de droite, on reconnaît :

1er terme : déplacement longitudinal d'ensemble

2ème et 3ème termes : déplacement longitudinal dû à la flexion

4ème terme : déplacement longitudinal de gauchissement).

Les 2ème et 3ème termes sont globalement invariants dans un changement de repère. D'où :

$$u_j(R_j, t^+) = u_j(t^+) - \xi_{j1}'(C_2) \cdot (x_1(R_j) - x_1(G_{j_2})) \\ - \eta_{j1}'(C_2) \cdot (y_1(R_j) - y_1(G_{j_2})) - \omega_2(R_j) \cdot \theta'(t)$$

$$\text{Or} \quad \left| \begin{array}{l} \xi_{j1}'(C_2) = \xi_{j1}'(C_1) - (y_1(C_2) - y_1(C_1)) \cdot \theta'(t) \\ \eta_{j1}'(C_2) = \eta_{j1}'(C_1) + (x_1(C_2) - x_1(C_1)) \cdot \theta'(t) \end{array} \right.$$

D'autre part, pour des raisons de continuité de la matière, $u_j(R_j, t^+) = u_j(R_j, t^-)$.

On en déduit, après avoir remplacé $\xi_{j1}'(C_1)$ et $\eta_{j1}'(C_1)$ par leurs équivalents $v_x'(t^-)$ et $v_y'(t^-)$:

$$\text{(IV)} \quad u_j(t^+) = u_j(t^-) - (x_1(G_{j_2}) - x_1(G_{j_1})) \cdot v_x'(t^-) \\ - (y_1(G_{j_2}) - y_1(G_{j_1})) \cdot v_y'(t^-) - \Omega_j \cdot \theta'(t^-)$$

$$\text{Avec :} \quad \Omega_j = \omega_1(R_j) - \omega_2(R_j) \\ + (y_1(C_2) - y_1(C_1)) \cdot (x_1(R_j) - x_1(G_{j_2})) \\ - (x_1(C_2) - x_1(C_1)) \cdot (y_1(R_j) - y_1(G_{j_2}))$$

$u_j(t^+)$ s'exprime donc comme une combinaison linéaire des composantes de $E(t^-)$.

Passons maintenant aux transformations des efforts internes.

II.2.2. Efforts internes

Chaque unité de contreventement présente éventuellement à la cote t une discontinuité de section.

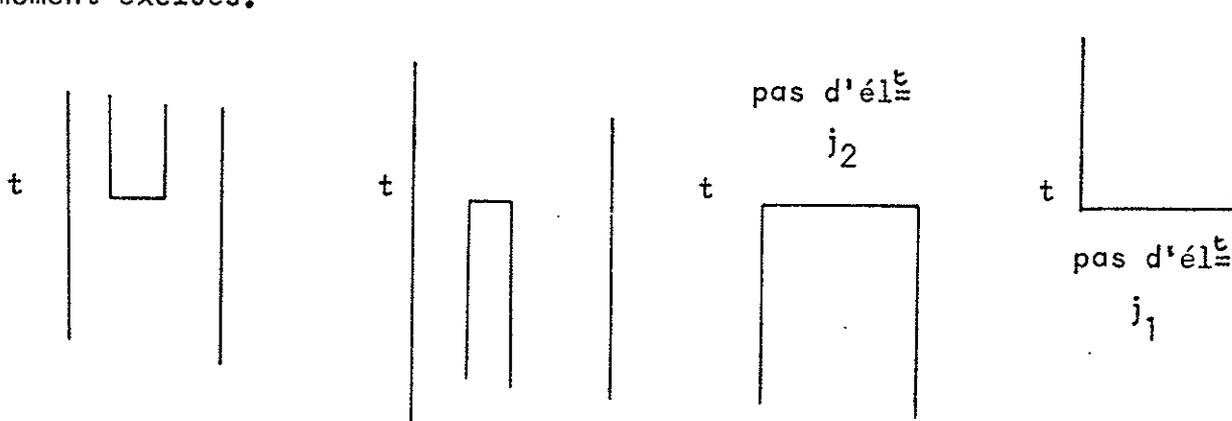
Soient :

S_{j_1} (resp. S_{j_2}) la section de j pour $z < t$ (resp. $z > t$).

$\sigma_j(s)$ (resp. $\tau_j(s)$) la contrainte normale (resp. le flux de cisaillement) appliquée par S_{j_2} sur S_{j_1} , au point $M(s)$ de $S_{j_1} \cap S_{j_2}$.

$\sigma_j(s)$ et $\tau_j(s)$ sont nuls sur les parties de section non communes à S_{j_1} et S_{j_2} .

On supposera encore dans ce paragraphe qu'il n'y a pas disparition ou apparition d'unités de contreventement à la cote t , c'est-à-dire que les discontinuités du type ci-dessous sont pour le moment exclues.



Dans les raisonnements ci-après, nous indiquerons comme précédemment en 1 (resp. 2) les grandeurs relatives à la section totale t^- (resp. t^+), calculées dans le repère principal de cette section.

a - Transformation des efforts normaux $N_j(t)$

$$N_{j1} = \int_{S_{j1} \cap S_{j2}} \sigma_j(s) dF = N_{j2}$$

(dF aire élémentaire)

On notera N_j .

b - Transformation des moments

Les intégrations ci-dessous se font sur $S_{j1} \cap S_{j2}$

$$\begin{cases} M_{xi} = \sum_j \int_j \sigma_j(s) \cdot (y_i(M) - y_i(G_{ji})) \cdot dF \\ M_{yi} = - \sum_j \int_j \sigma_j(s) \cdot (x_i(M) - x_i(G_{ji})) \cdot dF \end{cases}$$

G_{ji} : centre de gravité de j en $t^-(i=1)$ ou $t^+(i=2)$

$$(1) \quad \begin{cases} M_{xi} = \sum_j \int_j \sigma_j(s) \cdot y_i(M) \cdot dF - \sum_j y_i(G_{ji}) \cdot N_j \\ M_{yi} = - \sum_j \int_j \sigma_j(s) \cdot x_i(M) \cdot dF + \sum_j x_i(G_{ji}) \cdot N_j \end{cases}$$

Or, en notant $\alpha = (\overrightarrow{C_2x_2}, \overrightarrow{C_1x_1})$, on a, $\forall M$:

$$(2) \quad \begin{cases} x_2(M) = x_1(M) \cdot \cos \alpha + y_1(M) \cdot \sin \alpha + x_2(C_1) \\ y_2(M) = -x_1(M) \cdot \sin \alpha + y_1(M) \cdot \cos \alpha + y_2(C_1) \end{cases}$$

(rappelons que les axes principaux des sections 1 ou 2 sont rapportés aux centres de flexion, C_1 ou C_2).

D'où :

$$M_{x2} = M_x(t^+) = -\sin\alpha \int \varphi(s) \cdot x_1(M) \cdot dF + \cos\alpha \int \varphi(s) \cdot y_1(M) \cdot dF + \sum_j (y_2(G_{j1}) - y_2(G_{j2})) \cdot N_j$$

Or, d'après les relations (1) ci-dessus :

$$\left| \begin{array}{l} \int \varphi(s) \cdot y_1(M) \cdot dF = M_{x1} + \sum_j y_1(G_{j1}) \cdot N_j \\ \int \varphi(s) \cdot x_1(M) \cdot dF = -M_{y1} + \sum_j x_1(G_{j1}) \cdot N_j \end{array} \right.$$

De plus, $M_{x1} = M_x(t^-)$ et $M_{y1} = M_y(t^-)$

On en déduit :

$$M_x(t^+) = M_x(t^-) \cdot \cos\alpha + M_y(t^-) \cdot \sin\alpha - \sum_j y_2(G_{j2}) \cdot N_j + \sum_j N_j \cdot (-x_1(G_{j1})\sin\alpha + y_1(G_{j1})\cos\alpha + y_2(G_{j1}))$$

Le dernier facteur des N_j est égal à $y_2(G_{j1})$. (cf. ~~relation~~ relation du système (2) ci-dessus).

Par conséquent, on obtient :

$$(V) \quad M_x(t^+) = M_x(t^-)\cos\alpha + M_y(t^-)\sin\alpha + \sum_j (y_2(G_{j1}) - y_2(G_{j2})) \cdot N_j(t^-)$$

En procédant de même, on trouve pour $M_y(t^+)$:

$$(VI) \quad M_y(t^+) = -M_x(t^-)\sin\alpha + M_y(t^-)\cos\alpha - \sum_j (x_2(G_{j1}) - x_2(G_{j2})) \cdot N_j(t^-)$$

c - Transformation du bimoment

$$B_i = \sum_j \int \sigma(s) \cdot \omega_i(s) \cdot dF \quad (i=1 \text{ pour } t^- \text{ et } 2 \text{ pour } t^+)$$

On a introduit au paragraphe précédent les points R_j dits "points de référence de l'unité de contreventement j ".

Par suite du changement de géométrie que subit la section totale du contreventement à la cote t , on a en général $\omega_2(R_j) \neq \omega_1(R_j)$

Or, $\forall M \in S_{j_1} \cap S_{j_2}$, on peut écrire :

$$(3) \quad \begin{aligned} \omega_2(M) = \omega_1(M) + (y_1(C_2) - y_1(C_1)) \cdot x_1(s) \\ - (x_1(C_2) - x_1(C_1)) \cdot y_1(s) + \gamma_j \end{aligned}$$

Les 2ème et 3ème termes expriment le changement de pôle principal - γ_j est une constante dépendant de j exprimant le changement de point sectoriel initial principal.

En appliquant cette relation aux R_j , on extrait la valeur des γ_j :

$$\begin{aligned} \gamma_j = \omega_2(R_j) - \omega_1(R_j) - (y_1(C_2) - y_1(C_1)) \cdot x_1(R_j) \\ + (x_1(C_2) - x_1(C_1)) \cdot y_1(R_j) \end{aligned}$$

Nous avons supposé dans le paragraphe précédent que l'on se donnait les coordonnées cartésiennes $X(R_j)$ et $Y(R_j)$ (repère général) des R_j et leurs aires sectorielles principales dans chacun des tronçons constituant le contreventement. On peut donc calculer les γ_j .

Utilisant la relation 3 ci-dessus, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}
 B(t^+) &= \sum_j \int \varphi(s) \cdot \omega_2(s) \cdot dF \\
 &= \sum_j \int \varphi(s) \cdot \omega_1(s) \cdot dF \\
 &\quad + \sum_j (y_1(C_2) - y_1(C_1)) \cdot \int \varphi(s) \cdot x_1(s) \cdot dF \\
 &\quad - \sum_j (x_1(C_2) - x_1(C_1)) \cdot \int \varphi(s) \cdot y_1(s) \cdot dF \\
 &\quad + \sum_j \gamma_j \cdot N_j
 \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \int \varphi(s) \cdot y_1(s) \cdot dF = + M_x(t^-) + \sum_j y_1(G_{j1}) \cdot N_j(t^-)$$

$$\int \varphi(s) \cdot x_1(s) \cdot dF = - M_y(t^-) + \sum_j x_1(G_{j1}) \cdot N_j(t^-)$$

(cf. paragraphe (b) précédent)

D'où :

$$\begin{aligned}
 \text{(VII)} \quad B(t^+) &= B(t^-) - (y_1(C_2) - y_1(C_1)) \cdot M_y(t^-) \\
 &\quad - (x_1(C_2) - x_1(C_1)) \cdot M_x(t^-) \\
 &\quad - \sum_j \Omega_j \cdot N_j
 \end{aligned}$$

On retrouve en effet comme facteur des N_j la quantité Ω_j déjà rencontrée dans l'étude des $\Delta u_j(t)$.

$$\begin{aligned}
 \Omega_j &= \omega_1(R_j) - \omega_2(R_j) + (y_1(C_2) - y_1(C_1)) \cdot (x_1(R_j) - x_1(G_{j2})) \\
 &\quad - (x_1(C_2) - x_1(C_1)) \cdot (y_1(R_j) - y_1(G_{j2}))
 \end{aligned}$$

d - Efforts tranchants et moment de torsion

On a, par définition : ($i = 1$ pour t^- et 2 pour t^+)

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{xi} = \sum_j \int \tau_j(s) \cdot d_{xi} \\ T_{yi} = \sum_j \int \tau_j(s) \cdot d_{yi} \\ H_i = \sum_j \int \tau_j(s) \cdot d\omega_i \end{array} \right.$$

Par conséquent :

$$T_x(t^+) = \sum_j \int \tau_j(s) \cdot dx_2$$

$$\Leftrightarrow T_x(t^+) = \sum_j \int \tau_j(s) \cdot d(x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha + x_2(C_1))$$

$$(VIII) \quad \Leftrightarrow T_x(t^+) = \cos\alpha \cdot T_x(t^-) + \sin\alpha \cdot T_y(t^-)$$

De même :

$$(IX) \quad T_y(t^-) = -\sin\alpha \cdot T_x(t^-) + \cos\alpha \cdot T_y(t^-)$$

La formule (3) du paragraphe c précédent nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} d(\omega_2) &= d\omega_1 + (y_1(C_2) - y_1(C_1)) \cdot dx_1 \\ &\quad - (x_1(C_2) - x_1(C_1)) \cdot dy_1 \end{aligned}$$

D'où la relation suivante :

$$(X) \quad \begin{aligned} H(t^+) &= H(t^-) + (y_1(C_2) - y_1(C_1)) \cdot T_x(t^-) \\ &\quad - (x_1(C_2) - x_1(C_1)) \cdot T_y(t^-) \end{aligned}$$

II.2.3. Matrice transfert de discontinuité de section

Nous avons, dans les paragraphes précédents, étudié la transformation des composantes statiques et cinématiques de $E(z)$ au passage d'une discontinuité de section à la cote t .

Toutes les formules de transformation, notées de I à X, expriment les composantes de $E(t^+)$ comme des combinaisons linéaires des composantes de $E(t^-)$. On peut donc les résumer matriciellement, sous la forme donnée page suivante.

La matrice carrée $(13 + 2m) \times (13 + 2m)$ reliant $E(t^+)$ à $E(t^-)$ est la matrice-transfert de discontinuité de section à la cote t .

II.3. Fondation sur sol élastique.

II.3.1. Matrice transfert de fondation élastique

Nous allons introduire une matrice-transfert de fondation élastique, valable pourvu que soient vérifiées les hypothèses suivantes :

- H1 : Le module k de raideur du sol est le même en tout point du système de fondation.
- H2 : La structure est fondée sur semelle filante, et non sur radier général.
- H3 : Chaque unité de contreventement est fondée sur une semelle filante indépendante. (cf. Fig. 1 et Fig. 2)
- H4 : Le sol est comprimé en tout point de chaque semelle (i.e., il n'y a pas de décollement).

Ces hypothèses restrictives vont permettre de simplifier considérablement le raisonnement ci-après. Nous indiquerons dans le paragraphe suivant comment nous en affranchir.

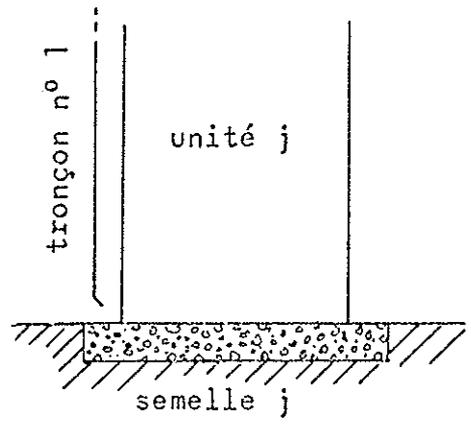


Fig. 1

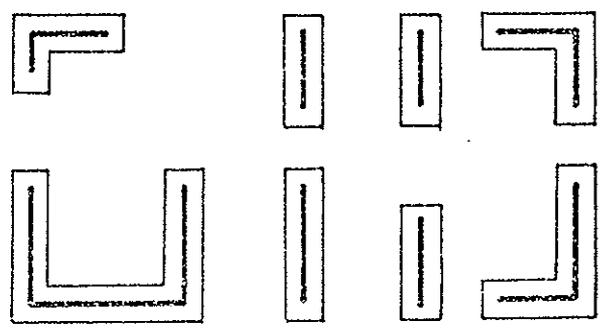


Fig. 2

La fig. 2 donne un exemple de système de fondation. La

trace des éléments de contreventement du 1er tronçon apparait en traits gras.

Le système de fondation est rapporté à son repère principal. On introduit aussi, comme pour un tronçon normal, le point C, pôle sectoriel principal et centre de flexion, à partir duquel on calcule les aires sectorielles principales. On introduit enfin les quantités I_{xx} , I_{yy} , J_{ω} et S_j (surface portante de la semelle j) (Remarquons que ce sont les inerties et non les rigidités qui seront ici utilisées, contrairement au cas des tronçons proprement dits).

Soit M un point quelconque d'une semelle de fondation j ($1 \leq j \leq m$), $u(M)$ son déplacement vertical en $z = 0$ et $\nabla(M)$ la contrainte exercée par la semelle j sur le sol au point M.

Les efforts internes dans la section d'encastrement sont :

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} M_x(o) &= - \sum_j \int_{\text{semelle } j} \nabla(M) \cdot (y(G_j) - y(M)) \cdot dF \\ M_y(o) &= + \sum_j \int_{\text{semelle } j} \nabla(M) \cdot (x(G_j) - x(M)) \cdot dF \\ B(o) &= + \sum_j \int_{\text{semelle } j} \nabla(M) \cdot \omega(M) \cdot dF \\ N(o) &= + \sum_j \int_{\text{semelle } j} \nabla(M) \cdot dF \end{aligned} \right.$$

Nous avons supposé qu'il n'y a pas décollement. Donc, en tout point M de la semelle j : $\nabla(M) = k \cdot u(M)$, avec :

$$u(M) = u_j(o) - v'_x(o)(x(M) - x(G_j)) - v'_y(o)(y(M) - y(G_j)) - \theta'(o) \quad (M)$$

On peut donc, dans chaque intégrale du système (1) ci-dessus, remplacer $\nabla(M)$ par l'expression développée de $u(M)$ multipliée par k .

Comme x , y et ω sont des coordonnées généralisées principales, on a :

$$\left| \begin{aligned} \sum_j \int_{\text{semelle } j} (y(G_j) - y(M)) \cdot (x(G_j) - x(M)) \cdot dF &= 0 \\ \sum_j \int_{\text{semelle } j} (y(G_j) - y(M))^2 \cdot dF &= I_{yy} \\ \sum_j \int_{\text{semelle } j} (x(G_j) - x(M))^2 \cdot dF &= I_{xx} \\ \sum_j \int_{\text{semelle } j} (x(G_j) - x(M)) \cdot \omega(M) \cdot dF &= \sum_j \int_{\text{semelle } j} (y(G_j) - y(M)) \cdot \omega(M) \cdot dF = 0 \\ \sum_j \int_{\text{semelle } j} \omega(M)^2 \cdot dF &= J_\omega \end{aligned} \right.$$

G_j étant centre de gravité de la semelle j :

$$\left| \begin{aligned} \int_{\text{semelle } j} (y(G_j) - y(M)) \cdot dF &= 0 \\ \int_{\text{semelle } j} (x(G_j) - x(M)) \cdot dF &= 0 \end{aligned} \right.$$

Par choix du point sectoriel initial de la semelle j :

$$\left| \int_{\text{semelle } j} \omega(M) \cdot dF = 0 \right.$$

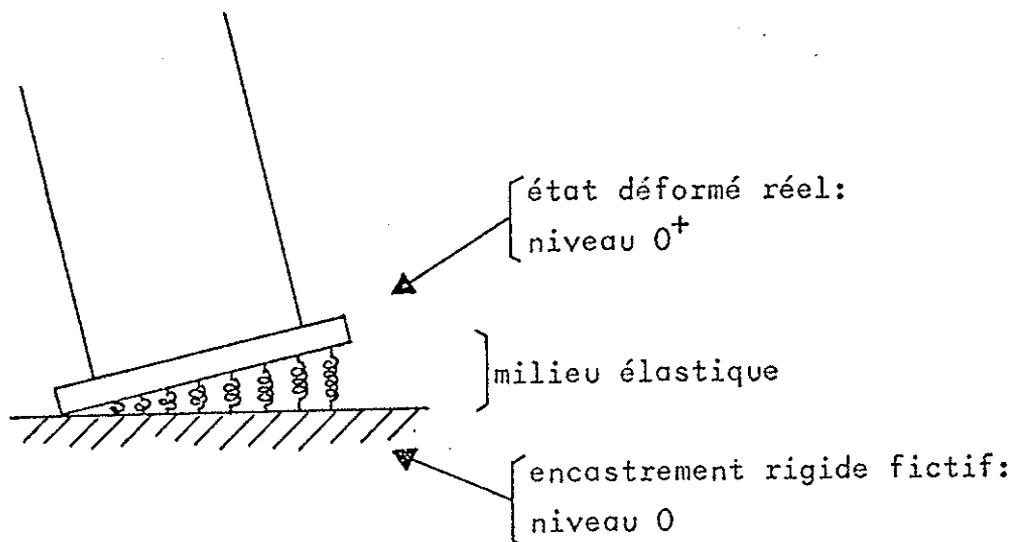
Enfin, par définition :

$$\left| \int_{\text{semelle } j} dF = S_j \right.$$

Après développement des formules (1) et simplification,
il vient :

$$\begin{cases} M_x(o) = -k \cdot I_{yy} \cdot v'_y(o) \\ M_y(o) = +k \cdot I_{xx} \cdot v'_x(o) \\ B(o) = -k \cdot J_{\omega} \cdot \theta'(o) \\ N_j(o) = +k \cdot S_j \cdot u_j(o) \end{cases}$$

Nous allons maintenant considérer que le véritable encastrement de la structure est un encastrement rigide situé juste au-dessous de la liaison élastique que nous venons d'étudier.



A l'encastrement rigide fictif, on a bien sûr :

$$u_j(o) = v'_x(o) = v'_y(o) = \theta'(o) = 0$$

Par contre, après la liaison élastique, i.e. en 0⁺,

ces quantités deviennent :

$$\left| \begin{array}{l} v'_x(o^+) = \frac{+}{\cancel{\otimes}} M_y(o) / k \cdot I_{xx} \\ v'_y(o^+) = \frac{-}{\cancel{\otimes}} M_x(o) / k \cdot I_{yy} \\ \theta'(o^+) = - B(o) / k \cdot J_{\omega} \\ u_j(o^+) = + N_j(o) / k \cdot S_j \end{array} \right.$$

(On a tout de suite tenu compte du fait que les efforts internes se conservent au passage de la liaison élastique)

d'où la matrice transfert de fondation élastique explicitée page suivante.

II.3.2. Généralisation

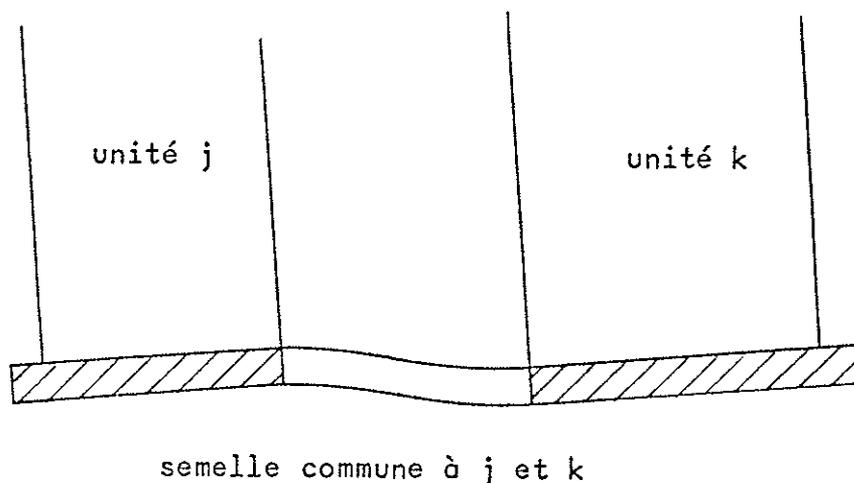
Nous allons reprendre chacune des hypothèses restrictives faites au paragraphe précédent, en indiquant comment il est possible de s'en affranchir :

H1 : "Le module de raideur k du sol est le même en tout point du système de fondation". Supposons que la semelle j soit fondée sur un sol de coefficient d'élasticité $k_j \neq k$. Il suffit, pour utiliser le raisonnement ci-dessus, de remplacer dès le début des calculs la semelle j par une semelle équivalente de largeur $e(s) \cdot k_j/k$, fondée sur le sol de coefficient k .

H2 : "La structure est fondée sur semelle filante et non sur radier général". On peut ici faire un calcul auxiliaire utilisant la méthode des éléments finis ou la Théorie des Equivalences : le système modélisé sol élastique + radier + base des éléments de contreventement est soumis successivement à des déplacements unitaires $v'_x(o) = 1$, $v'_y(o) = 1$, $\theta'(o) = 1$, $u_j(o) = 1$, qui permettent de calculer numériquement les

coefficients de proportionnalité intervenant dans la matrice transfert de fondation élastique.

H3 : "Chaque unité de contreventement est fondée sur une semelle indépendante".



Il suffit de considérer la partie non hachurée du schéma comme un linteau : Une matrice transfert de passage de niveau à linteaux sera associée à la matrice de fondation élastique :

$$E(o^+) = M_L \cdot M_k \cdot E(o)$$

H4 : "Le sol est comprimé en tout point de chaque semelle". Quand on tient compte des charges verticales permanentes et des surcharges, cette hypothèse est la plupart du temps vérifiée. Si on veut absolument corriger les résultats dans le cas où elle ne l'est pas, il faut refaire le calcul en supprimant les parties de semelle soulevées. Si une semelle j est entièrement soulevée, on peut prendre pour S_j la valeur réelle divisée par 10 ou 100 : faire $S_j = 0$ introduirait des termes infinis dans le calcul et conduirait à des résultats aberrants.