

III - APPLICATION AU CALCUL PRATIQUE DES CONTREVENTEMENTS.

III.1. Construction de la matrice-transfert globale d'un contreventement d'immeuble, soumis à un chargement donné.

Soit l la cote du sommet de l'immeuble.

Il est clair qu'en partant de $E(o)$ (encastrement rigide, fictif ou non, à la cote o), et en cheminant de singularité en singularité, multipliant à chaque fois par la matrice transfert qui convient, on aboutit à une relation liant matriciellement $E(l)$ et $E(o)$.

$$E(l) = M.E(o)$$

M est la matrice-transfert globale de l'immeuble. Il est facile de vérifier que les termes de charge, introduits dans la dernière colonne des matrices-transfert de tronçon, ne viennent pas perturber, au cours des multiplications entre matrices, les termes des autres colonnes.

Autrement dit, M est formée de deux parties bien distinctes :

- La sous-matrice extraite de M par suppression de la dernière ligne et de la dernière colonne ne dépend que des caractéristiques géométriques et mécaniques du système de contreventement étudié.
- La dernière colonne dépend des termes de charge.

D'un point de vue pratique, on déduit de cette propriété qu'on peut, en un seul calcul matriciel, traiter plusieurs cas de charge : il suffit de mener le calcul avec plusieurs colonnes de termes de charge.

III.2. Conditions aux extrémités et résolution du problème.

De la relation matricielle $E(1) = M \cdot E(0)$, on peut extraire $12 + 2m$ relations linéaires liant les $2 \times (12 + 2m)$ composantes de $E(1)$ et $E(0)$.

Les $12 + 2m$ équations supplémentaires nécessaires pour une détermination complète de $E(1)$ et $E(0)$ s'obtiennent en traduisant les conditions aux limites en $z = 0$ et $z = 1$.

En effet, $z = 0$ est une section d'encastrement rigide (qui peut être fictive : cf. III.3.). Donc :

$$v_x(0) = v_y(0) = \theta(0) = v'_x(0) = v'_y(0) = \theta'(0) = u_j(0) = 0$$

(6 + m relations)

$z = 1$ est une extrémité libre. Par conséquent :

$$M_y(1) = T_x(1) = M_x(1) = T_y(1) = B(1) = H(1) = N_j(1) = 0$$

(6 + m relations)

Nous avons donc écrit autant d'équations indépendantes qu'il y a d'inconnues.

La résolution pratique du système linéaire peut se faire de la manière suivante :

Les efforts internes en 1 (qui sont nuls) s'expriment linéairement en fonction des seuls efforts internes à l'encastrement (les composantes cinématiques de $E(0)$ sont nulles) et des termes de charge.

On peut donc extraire du système général le sous-système

indépendant suivant :

$$\begin{bmatrix} M_y(1) \\ T_x(1) \\ M_x(1) \\ T_y(1) \\ B(1) \\ H(1) \\ N_j(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \times M^* \times \begin{bmatrix} M_y(0) \\ T_x(0) \\ M_x(0) \\ T_y(0) \\ B(0) \\ H(0) \\ N_j(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{M_y}(1) \\ \overline{T_x}(1) \\ \overline{M_x}(1) \\ \overline{T_y}(1) \\ \overline{B}(1) \\ \overline{H}(1) \\ \overline{N_j}(1) \end{bmatrix}$$

M* est la matrice extraite de M correspondant au système linéaire décrit. Le vecteur colonne situé tout à fait à droite comprend les termes de charge extraits de la dernière colonne de M et correspondant aux efforts internes.

De la relation matricielle ci-dessus, on déduit immédiatement

$$\begin{bmatrix} M_y \\ T_x \\ M_x \\ T_y \\ B \\ H \\ N_j \end{bmatrix}_{z=0} = - \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \times M^* \times \begin{bmatrix} \overline{M_y} \\ \overline{T_x} \\ \overline{M_x} \\ \overline{T_y} \\ \overline{B} \\ \overline{H} \\ \overline{N_j} \end{bmatrix}_{z=1}$$

D'où les valeurs numériques des efforts internes dans la section d'encastrement. Les autres composantes de E(0) étant nulles, E(0) est maintenant entièrement déterminé.

Nous pouvons alors calculer directement E(1) par la relation : E(1) = M . E(0).

Mais surtout nous pouvons maintenant déterminer tous

les vecteurs-état $E(z)$ intermédiaires ($0 \leq z \leq 1$) : il suffit en effet de multiplier le vecteur-état $E(0)$, désormais connu, par les matrices-transfert adéquates, qui de singularité en singularité permettent de parvenir jusqu'à la cote z . On obtient ainsi la valeur numérique de toutes les composantes de $E(z)$, à partir desquelles nous pourrions calculer un certain nombre de quantités relatives à la section z (déplacements horizontaux ou verticaux, moments ou efforts normaux dans les voiles, efforts tranchants dans les linteaux, contraintes normales dans les voiles, etc ...).

III.3. - Programmation en vue du calcul automatique.

Pour des raisons de sûreté et de rentabilité, la méthode exposée ci-dessus ne peut, dans les cas courants, donner lieu à des calculs manuels, et l'utilisation d'un ordinateur est par conséquent indispensable.

Le programme de calcul automatique qui a été écrit afin de tester la méthode est organisé de la façon suivante :

- Lecture des données (caractéristiques géométriques et mécaniques de la structure, chargement appliqué) et calculs préparatoires.
- Première étape de calcul : Calcul de la matrice transfert globale de l'immeuble par produits successifs des matrices transfert de tronçon et de discontinuité (cf. III.1.). Détermination de $E(o)$ par résolution du sous-système linéaire extrait (cf. III.2.).
- Deuxième étape de calcul : Détermination de proche en proche, à partir de $E(o)$, des vecteurs-état des cotes de calcul demandées par l'utilisateur. Cette partie du calcul se fait suivant le principe des produits en cascade de la première partie, mais cette fois le calcul n'est pas mené matriciellement : on utilise directement les relations linéaires établies dans les chapitres I et II, qui relient les composantes des vecteurs-état de deux sections consécutives.
- Sortie des résultats : Pour chaque cote de calcul demandée par l'utilisateur, on détermine, à partir des composantes du vecteur-état correspondant, les quantités suivantes : (la section est rapportée au repère général OXYZ)
 - angle de torsion de la section et dérivées première, seconde et troisième par rapport à z ;
 - déplacements horizontaux du point O (origine du repère général choisi par l'utilisateur), du point C (centre de flexion général de la section sans linteaux), et des centres

de flexion C_i de chacun des éléments de contreventement i ;
 - dérivées premières et secondes de ces déplacements ;
 - déplacement vertical d'ensemble et effort normal de chaque élément de contreventement ;
 - éventuellement, efforts tranchants dans les linteaux, s'il en existe dans la section considérée.

Les moments suivant \vec{OX} et \vec{OY} régnant dans chaque élément de contreventement de la section se déduisent des dérivées secondes des déplacements horizontaux des centres de flexion de ces éléments :

$$M_{xi} = - E_i I_{xi} v_y''(C_i)$$

$$M_{yi} = + E_i I_{yi} v_x''(C_i)$$

La contrainte normale en un point M d'un élément de contreventement i est donnée par l'une des formules suivantes :

$$\sigma(M) = \frac{N_i}{S_i} - E_i \cdot v_x''(C_i) \cdot (X(M) - X(G_i))$$

$$- E_i \cdot v_y''(C_i) \cdot (Y(M) - Y(G_i))$$

$$- E_i \cdot \theta'' \cdot \omega_i(M)$$

$$\sigma(M) = \frac{N_i}{S_i} - E_i \cdot v_x''(C) \cdot (X(M) - X(G_i))$$

$$- E_i \cdot v_y''(C) \cdot (Y(M) - Y(G_i))$$

$$- E_i \cdot \theta'' \cdot \omega(M)$$

$$\sigma(M) = \frac{N_i}{S_i} - E_i \cdot v_x''(0) \cdot (X(M) - X(G_i))$$

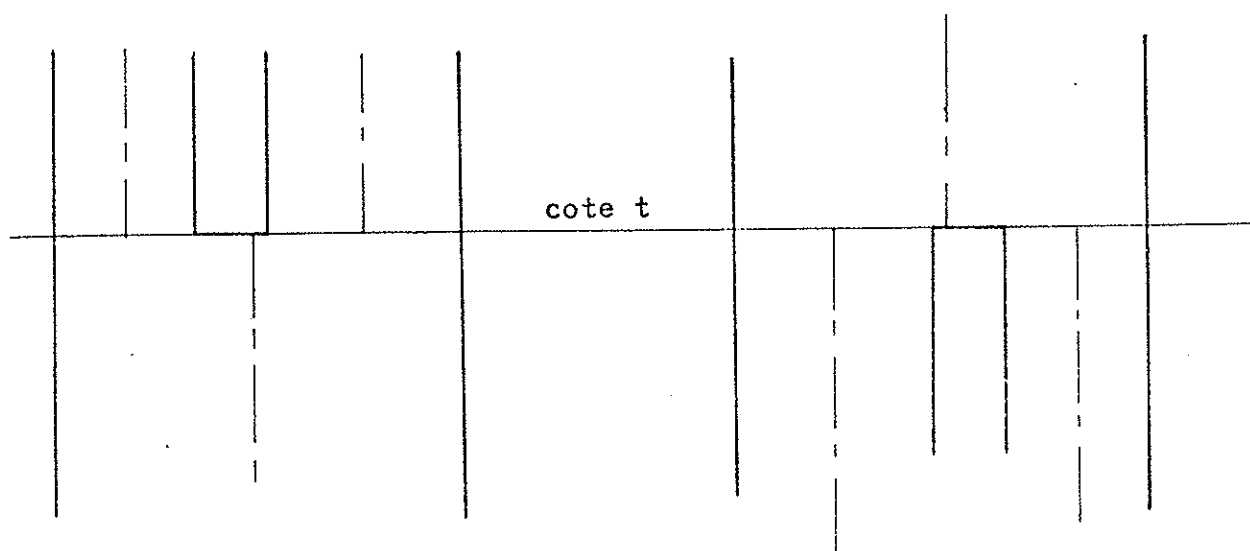
$$- E_i \cdot v_y''(0) \cdot (Y(M) - Y(G_i))$$

$$- E_i \cdot \theta'' \cdot \Omega(M)$$

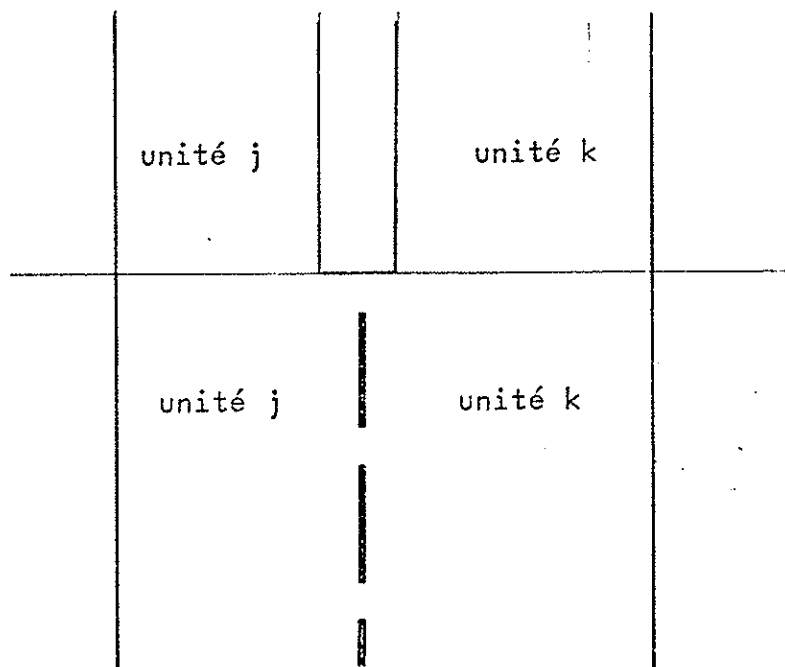
$\omega_i(M), \omega(M), \Omega(M)$ étant les aires sectorielles de M calculées respectivement à partir de C_i, C et 0 .

REMARQUES.

- Les matrices transfert qui interviennent dans les calculs sont très creuses. Seules quelques uns de leurs éléments sont non nuls : aussi est-il économique, au niveau de la programmation, d'écrire les produits de matrice dans le détail, en n'effectuant que les combinaisons linéaires correspondant aux éléments non nuls.
- Pour établir la matrice de discontinuité de section, nous avons supposé que la section de discontinuité ne comportait pas de linteaux, et que le nombre d'unités de contreventement ne variait pas à son passage. On peut s'affranchir facilement de la première hypothèse restrictive. Une discontinuité de section avec linteaux se traitera en deux étapes : d'abord la discontinuité puis les linteaux, ou le contraire, suivant que l'on considère que les linteaux font partie du tronçon supérieur ou inférieur. Quant à la deuxième hypothèse restrictive, deux cas peuvent se produire
 - 1 unité de contreventement j se termine à la cote $t < 1$: Rien de spécial à prévoir, $u_j(t)$ et $N_j(t)$ ne seront pas modifiés par les produits intervenant entre t et 1 , et $N_j(0)$ sera calculé normalement par résolution du système linéaire extrait. (même chose si l'unité j apparaît en $t > 0$)
 - Les cas correspondant aux figures ci-dessous peuvent se traiter par une matrice de discontinuité généralisée.



Mais, si on veut pouvoir traiter tous les cas envisageables, les problèmes de programmation deviennent très complexes. Il est plus simple d'introduire des "coutures" par linteaux très rigides, en procédant comme indiqué ci-dessous :



(la raideur des linteaux est 100 fois celle d'un linteau usuel)

III.4. - Complément : Prise en compte des portiques réguliers.

La méthode approchée exposée ci-après permet d'introduire dans un système de contreventement des portiques multitravées non symétriques, avec prise en compte des déformations d'effort normal dans les montants. Elle suppose que les caractéristiques des portiques ne varient pas avec la hauteur, ou tout au moins, restent constantes par groupes d'étages (5 ou 6 minimum).

III.4.1. - Portiques symétriques à une travée

Ce cas particulier va nous permettre de donner le principe de la méthode.

Considérons le portique symétrique ci-dessous, rapporté au repère $(0 \xi z)$: Fig. 1

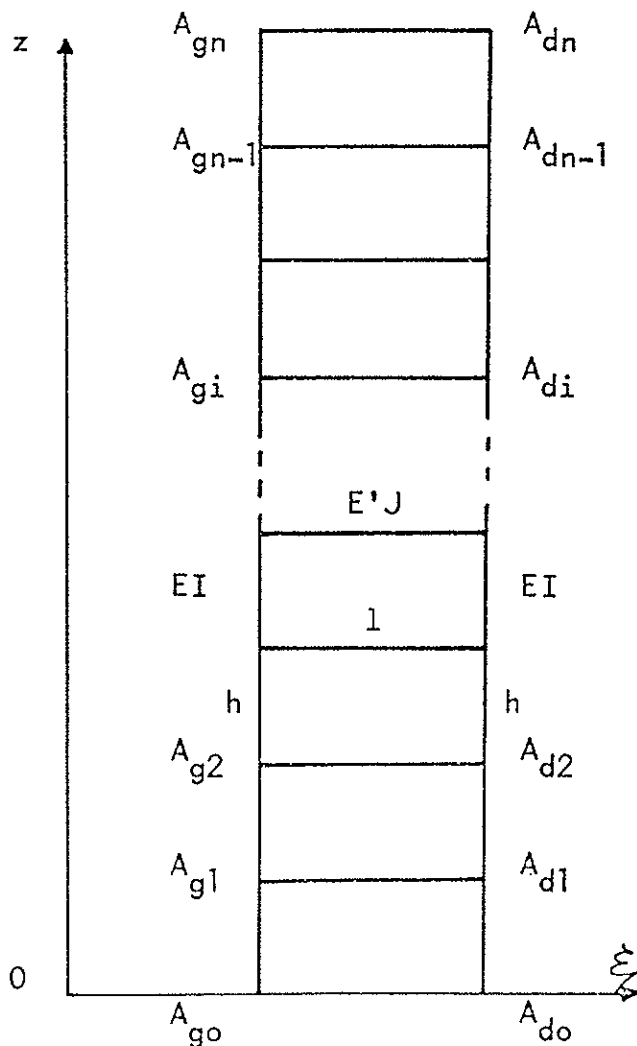


Fig. 1 : notations

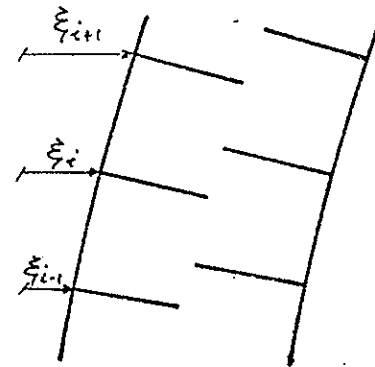


Fig. 2 a : déformée $\xi_0(z)$

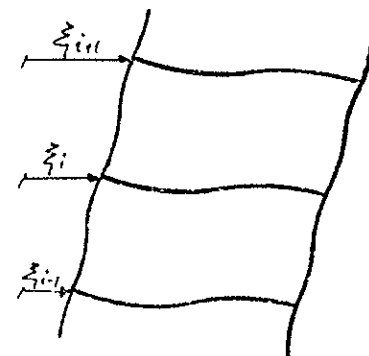


Fig. 2 b : fermeture des coupures

Après avoir réalisé une coupure au milieu M_i de chaque traverse i , donnons à ce portique une déformée horizontale $\xi_0(z)$ obtenue en imposant que chaque noeud A_{gi} prenne une certaine flèche ξ_i (la flèche des A_{di} est aussi ξ_i). Fig. 2 a.

Refermons maintenant toutes les coupures des milieux de traverse M_i , tout en imposant aux A_{gi} et A_{di} de garder leur flèche horizontale ξ_i (Fig. 2 b). Cette fermeture des coupures se fait en appliquant aux noeuds M_i les deux efforts verticaux opposés d'intensité T_i qui conviennent (les M_i étant points d'inflexion, il n'y a pas de moments hyperstatiques libérés).

Notons $\xi_1(z)$ la nouvelle déformée des montants et posons

$$\Delta \xi(z) = \xi_1(z) - \xi_0(z)$$

On a pour $i = 1, n$:

$$\Delta \xi(z_i) = 0$$

$\Delta \xi(z)$ s'annule en outre une fois entre chaque étage et possède par conséquent un point d'inflexion entre chaque étage.

Nous supposons que ce point d'inflexion et ce point d'annulation sont confondus et se situent exactement à mi-étage.

Si EI est la rigidité des montants, la variation de moment dans ces montants, due à la fermeture des coupures est :

$$\Delta M(z) = -EI \cdot \Delta \xi''(z)$$

Le point à mi-étage est donc point de variation de moment nulle (\neq point de moment nul).

On en déduit que pour la fermeture des coupures, le portique peut être approximé par la structure ci-dessous (Fig. 3).

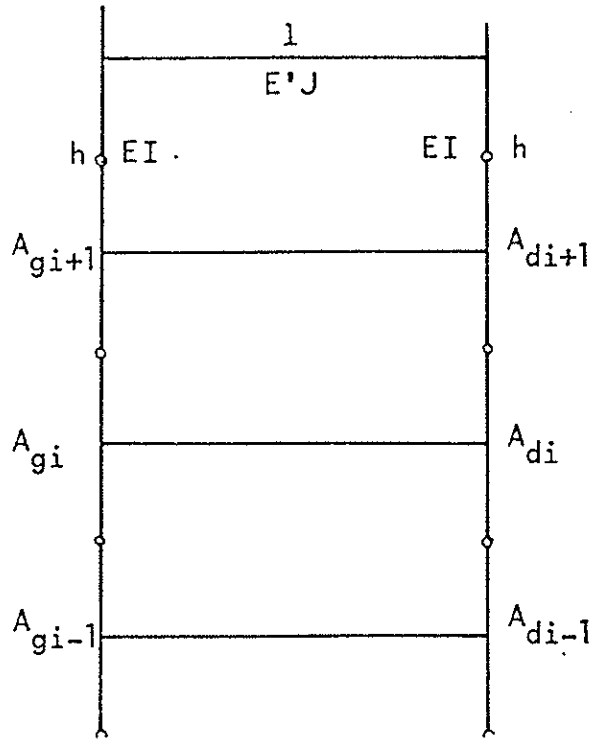


Fig. 3

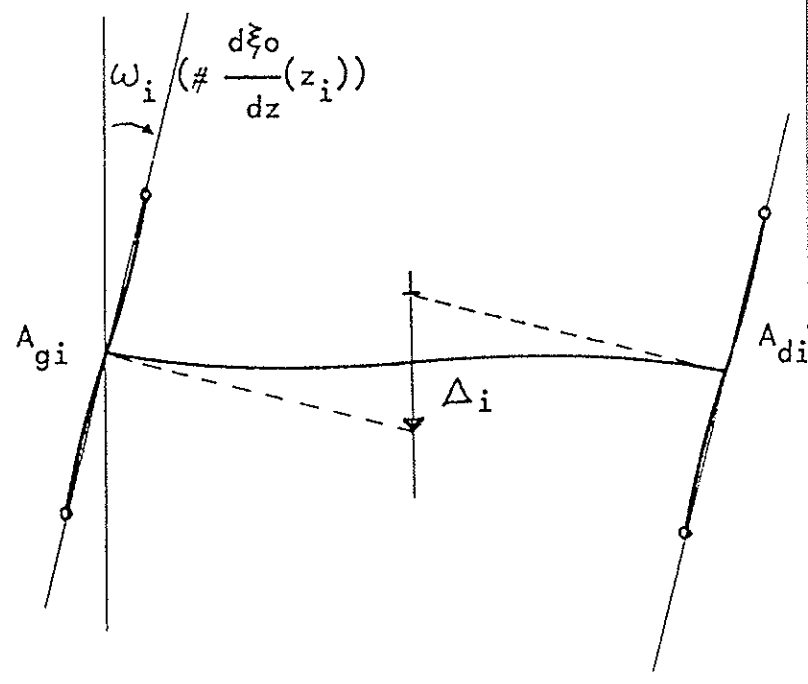


Fig. 4

Isolons l'élément de l'étage i (après fermeture des coupures) (Fig. 4). Δ_i étant défini sur la figure 4, un calcul simple montre que : (T_i est l'effort tranchant dans la traverse)

$$T_i = \left(\frac{h l^2}{24 EI} + \frac{l^3}{12 E'J} \right)^{-1} \cdot \Delta_i = K \cdot \Delta_i$$

Soient $u_g(z)$ (resp. $u_d(z)$) les déformations d'effort normal dans le montant gauche (resp. droit).

$$\Delta_i = \omega_i \cdot l + u_g(z_i) - u_d(z_i)$$

$$\Delta_i \neq - \frac{d\xi_0}{dz}(z_i) l + u_g(z_i) - u_d(z_i)$$

D'où :
$$T_i = K \cdot \left(-\xi_0'(z_i) l + u_g(z_i) - u_d(z_i) \right) \quad (1)$$

De tout ce qui précède, nous pouvons déduire que l'action résistante du portique, dans le système général de contreventement peut être approximée de la manière suivante.

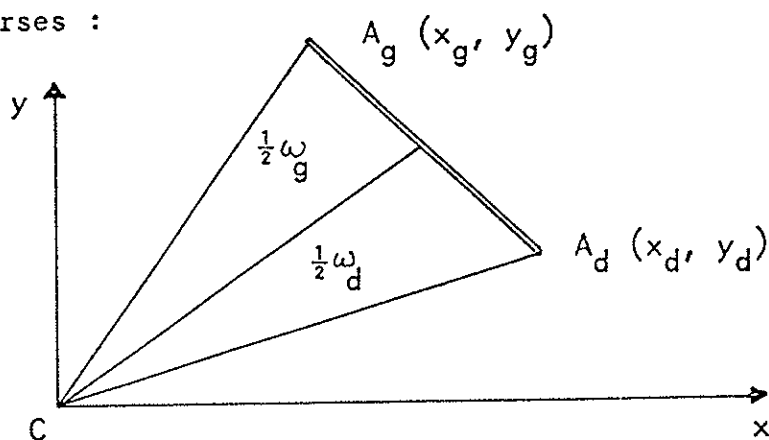
Les deux montants sont représentés par deux "unités de contreventement", de numéros j_g et j_d . A toute cote z , le vecteur état $E(z)$ comprend donc $u_{j_g}(z)$, $N_{j_g}(z)$, $u_{j_d}(z)$ et $N_{j_d}(z)$.

En torsion-flexion, les unités j_g et j_d travaillent conjointement avec les autres refends et profils ouverts : elles ont une déformée du type $\xi_0(z)$.

Considérons un étage i quelconque du portique et écrivons la formule (1) ci-dessus dans le repère local du tronçon où se trouve l'étage i :

$$T_i = K \cdot (u_{j_g}(z_i) - u_{j_d}(z_i) - v'_x(z_i) \cdot (x_d - x_g) - v'_y(z_i) \cdot (y_d - y_g) - \theta'(z_i) \cdot (\omega_d - \omega_g))$$

ω_g et ω_d sont les aires sectorielles de pôle C des lèvres de la coupure, calculées à partir de A_g et A_d , le long des demi-traverses :



$$\omega_g - \omega_d = x_g \cdot y_d - x_d \cdot y_g$$

On retrouve la formule établie en II.1., pour la prise en compte des linteaux : l'action résistante de chaque étage de portique est la même que celle d'un linteau équivalent de raideur K :

$$K = \left(\frac{h l^2}{24 EI} + \frac{l^3}{12 E'J} \right)^{-1}$$

Cet artifice permet d'introduire des portiques symétriques à une travée dans un calcul de contreventement, avec prise en compte des déformations d'effort normal dans les montants, sans modification de la méthode générale exposée dans les chapitres précédents. On peut également l'utiliser pour des portiques multitravée du type suivant :

E'J	E'J	E'J	E'J	E'J	E'J	
$\frac{1}{2}EI$	EI	EI	EI	EI	EI	$\frac{1}{2}EI$
h	h	h	h	h	h	h
l	l	l	l	l	l	

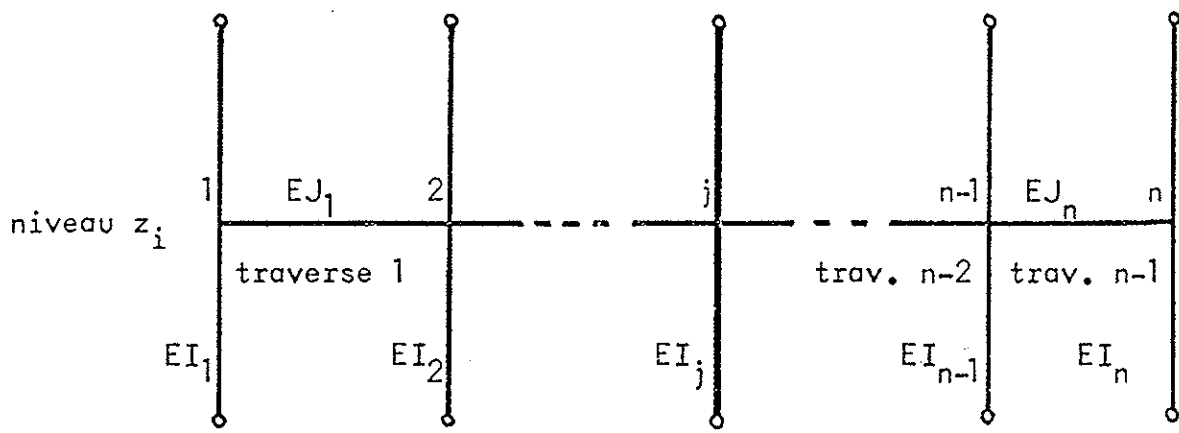
Les efforts tranchants dans les traverses, T_i , sont donnés directement. Les moments dans les montants se calculent en ajoutant aux moments moyens de type $M_0 = -EI \xi''_0$ (donnés par la méthode des matrices transfert) les sauts de moment déduits des T_i .

III.4.2. - Portiques multitravées non symétriques

Un raisonnement du type de celui du paragraphe précédent conduit à étudier l'action résistante de l'élément d'étage ci-dessous, soumis aux déplacements suivants :

- inclinaison $\omega_i \neq - \frac{d\xi_o}{dz} (z_i)$

- déformations d'effort normal $u_j(z_i)$ dans les montants j ($j = 1, n$)



Il est nécessaire ici de faire appel aux coefficients d'influence de ces déplacements sur les efforts tranchants dans les traverses 1 à $n-1$.

Soit k une des $n-1$ traverses. Le signe de T_k sera par exemple celui de l'effort vertical exercé par le bord droit d'une coupure sur le bord gauche.

T_k pourra s'écrire :

$$T_k = -K_k^\omega \cdot \xi_o'(z_i) + \sum_j K_k^j \cdot u_j(z_i)$$

Les coefficients K_k^ω et K_k^j seront déterminés numériquement soit par un programme de calcul de système de barres, soit par la technique des matrices transfert appliquées aux poutres continues (Réf. , p. 39 à 47. La programmation de cette application est simple).

Nous obtenons ainsi une généralisation des formules du paragraphe II.2., établies pour la prise en compte des linteaux. Nous ne donnerons pas les formules correspondant aux sauts de moments et de bimoment, qui se déduisent facilement de celles du II.2. D'un point de vue pratique, comme pour le cas des portiques symétriques à une travée (III.4.1), nous introduirons une unité de contreventement par montant. Les efforts tranchants dans les traverses (T_k) pourront être calculés directement par l'ordinateur au moment de la sortie des résultats. Le calcul des sauts de moment dans les montants du portique suppose que l'on en connaisse les coefficients d'influence, vis à vis de ω et des u_j .