Logiciel ÉPICENTRE

Série Théorie & Pratique

Conformité des algorithmes de ferraillage d'ÉPICENTRE avec la méthode de l'ellipsoïde pour la combinaison des efforts internes

Michel Hénin

Janvier 2022

Les notes techniques de la série « Théorie & Pratique » présentent sous une forme simple et concrète les connaissances de base nécessaires pour aborder rapidement le calcul sismique des bâtiments avec le logiciel ÉPICENTRE.

Introduction

Le but de la présente note est de présenter la démonstration élaborée par Laurent Guisset, gérant du bureau d'études SG INGÉNIERIE à Rivesaltes et utilisateur d'ÉPICENTRE, pour montrer que la méthode utilisée par ÉPICENTRE pour combiner les efforts internes (M, N) issus du calcul sismique dynamiques est équivalent à la méthode de l'ellipsoïde décrite depuis longtemps dans la littérature technique relative aux calculs sismiques.

Combinaison des efforts internes issus de la superposition modale

Le calcul sismique par analyse modale spectrale fournit pour chaque section de mur la valeur maximale probable des efforts internes pendant le séisme de calcul (moments fléchissants, bimoment, effort normal, efforts tranchants).

Ces valeurs sont les combinaisons de Newmark des valeurs obtenues par superposition modale selon chacune des deux directions simiques de calcul. Elles sont données sans signe, puisqu'elles sont issues de combinaisons quadratiques complètes.

Pour dimensionner le ferraillage des sections, il serait pessimiste de considérer que ces différents efforts atteignent leurs maximums en même temps. Il faut de plus résoudre la difficulté liée à l'absence de signe.

La méthode de l'ellipsoïde

Cette méthode bien connue a été présentée par A. K. Gupta et M. P. Singh en 1977 (*Design of column sections subjected to three components of earthquake, Nuclear Engeneering and Design, p. 129-133*). Elle est également décrite dans plusieurs ouvrages français (*par exemple, Calcul Dynamique des Structures en Zone sismique, Alain Capra et Victor Davidovici, Eyrolles 1980, P. 65-72*).

En résumé, si on s'intéresse à une section soumise à des efforts N, Mx et My d'origine sismique, les combinaisons (N, Mx, My) probables sont situées à l'intérieur d'un ellipsoïde inscrit dans un parallélépipède de côtés 2 Nmax, 2 Mxmax, 2 Mymax.

Les combinaisons d'efforts les plus défavorables sont bien entendu situées sur la surface de cet ellipsoïde.
Cette méthode est rigoureuse mais elle est difficile à mettre en œuvre, en particulier lorsqu'on s'intéresse à plus de 3 paramètres (par exemple : Mx, My, B, N).

La méthode mise en œuvre par ÉPICENTRE est mathématiquement équivalente à la méthode de l'ellipsoïde

La méthode utilisée par ÉPICENTRE pour déterminer les combinaisons d'efforts internes de calcul est décrite dans la note technique de la série « Théorie et pratique » intitulée « Ferraillage des murs en béton par ÉPICENTRE » (pages 3-5).

Elle est basée sur l'exploitation de points de tangence au diagramme de Newmark des contraintes normales de la section considérée.

Il se trouve que cette méthode est mathématiquement équivalente à la méthode exacte de l'ellipsoïde : la démonstration rigoureuse en a été apportée par Monsieur Laurent Guisset, gérant du bureau d'études SG INGÉNIERIE à Rivesaltes (et utilisateur d'ÉPICENTRE !).

La démonstration de Laurent Guisset

La démonstration de Laurent Guisset est à la fois très simple dans son principe et très impressionnante par les calculs qu'elle implique. Elle consiste à établir l'expression mathématique des efforts N et M retenus par ÉPICENTRE, puis à vérifier qu'ils sont sur l'ellipse de Gupta et Singh.

L'auteur du logiciel ÉPICENTRE félicite chaleureusement Laurent Guisset et le remercie de l'avoir autorisé à diffuser le détail de sa démonstration, qui est présenté ci-après.

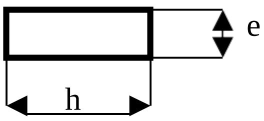
Méthode de combinaison modale pour deux paramètres à partir des contraintes normales en combinaison quadratique complète (CQC)

Objet : Les deux paramètres sont le moment fléchissant et l'effort normal pour le calcul des armatures longitudinales d'une section rectangulaire en béton armé.

Principe de la méthode : à partir des contraintes normales linéaires modales, on calcule la contrainte normale issue de la CQC des précédentes en tout point de la section ; puis on détermine la droite tangente à la courbe obtenue au point considéré avant d'obtenir le couple « probable » par intégration.
Nous allons démontrer que cette méthode est équivalente à la méthode générale qui passe par la détermination d'une ellipse d'équation : $(N/\bar{N})^2 + (M/\bar{M})^2 - 2\rho(NM/\bar{N}\bar{M}) = 1-\rho^2$

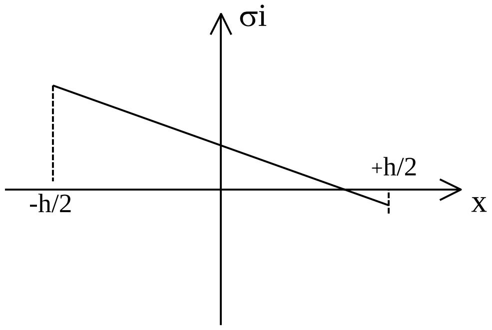
Démonstration :

Notations :

- Ni et Mi = effort normal et moment fléchissant (pris avec leur signe) pour le mode i .
- Section BA : 

- $\bar{N} = \sqrt{(\Sigma i\ \Sigma j\ \beta ij\ Ni\ Nj)}$: CQC des efforts normaux
- $\bar{M} = \sqrt{(\Sigma i\ \Sigma j\ \beta ij\ Mi\ Mj)}$: CQC des moments fléchissants
- $\rho = (\Sigma i\ \Sigma j\ \beta ij\ Mi\ Nj) / (\bar{M}\ \bar{N})$: coefficient de corrélation entre les deux paramètres
- σi : contrainte normale linéaire pour le mode i
- σ : contrainte normale CQC
- σ_T : contrainte tangente à σ ; variable $= x_T$
- N et M : couple probable recherché

Équation des contraintes normales modales :
On suppose le repère centré sur le centre de gravité de la section



$\sigma i\ (x) = Ni/S + Mi\ x / I$

avec $S = eh$ (aire)
$I = (eh^3)/12$ (inertie)

soit $\sigma i\ (x) = (Ni/eh) + (12\ Mi\ x / (eh^3))$

Equation de la contrainte CQC :

$\sigma(x) = \sqrt{(\Sigma i\ \Sigma j\ \beta ij\ \sigma i\ \sigma j)}$

$= \sqrt{\{\Sigma i\ \Sigma j\ \beta ij\ [Ni/eh + 12\ Mi\ x / (eh^3)]\ .\ [Nj/eh + 12\ Mj\ x / (eh^3)]\}}$

$= \sqrt{\{\Sigma i\ \Sigma j\ \beta ij\ [(144\ Mi\ Mj\ x^2/(e^2 h^6)) + (Ni\ Nj / e^2h^2) + (12\ Mi\ Nj\ x / (e^2 h^4)) + (12\ Mj\ Ni\ x / (e^2 h^4))]\}}$

$= \sqrt{\{\Sigma i\ \Sigma j\ \beta ij\ [(144\ Mi\ Mj\ x^2/(e^2 h^6)) + (Ni\ Nj / e^2h^2) + (24\ Mi\ Nj\ x / (e^2 h^4))]\}}$

$= \sqrt{\{[144\ \bar{M}^2 x^2 / (e^2 h^6)] + [\ \bar{N}^2 / e^2h^2\ ] + [24\ \rho\ \bar{M}\ \bar{N}\ x / (e^2 h^4)]\}}$

Posons: $A = 144\ \bar{M}^2 / (e^2 h^6)$

$B = 24\ \rho\ \bar{M}\ \bar{N} / (e^2 h^4)$

$C = \bar{N}^2 / e^2h^2$

On a donc: $\sigma(x) = \sqrt{(Ax^2 + Bx + C)}$

Equation de la contrainte tangente σ_T ,tangente au point d'abscisse x :

$\sigma_T(x_T) = \sigma'(x)\ (x_T - x) + \sigma(x)$

avec $\sigma'(x) = (2\ A\ x + B) / [2\sqrt{(Ax^2 + Bx + C)}]$

soit $\sigma_T(x_T) = [(2\ A\ x + B)\ (x_T - x)\ )\ / (2\sqrt{(Ax^2 + Bx + C)})]\ +\ [\sqrt{(Ax^2 + Bx + C)}]$

Couple probable N et M :

On les obtient par intégration de σ_T

$$N = \int_{-h/2}^{+h/2} (\ e\ \sigma_T(x_T)\ dx_T\ ) = e \int_{-h/2}^{+h/2} (\ \sigma_T(x_T)\ dx_T\ )$$

$$N = e \int_{-h/2}^{+h/2} (\{[(2\ A\ x + B)\ (x_T - x)\ )\ / (2\sqrt{(Ax^2 + Bx + C)})]\ +\ [\sqrt{(Ax^2 + Bx + C)}]\}dx_T\ )$$

$$N = e\ \{[(2\ Ax + B)\ \Big[(x_T^2 / 2) - (x\ x_T)\Big]_{-h/2}^{+h/2} / (2\sqrt{(Ax^2 + Bx + C)})] + [\sqrt{(Ax^2 + Bx + C)}\ \Big[(x_T)\Big]_{-h/2}^{+h/2}\ ]\ \}$$

$$N = e\ \{[(2\ Ax + B)\ (-x\ h) / (2\sqrt{(Ax^2 + Bx + C)})]\ + [\ (\ h\ )\ \sqrt{(Ax^2 + Bx + C)}]\ \}$$

$$N = e\ h\ [-x\ (2\ Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C)] / (\ 2\ \sqrt{(Ax^2 + Bx + C)})$$

$$N = e\ h\ (Bx + 2C) / (\ 2\ \sqrt{(Ax^2 + Bx + C)})$$

$$M = \int_{-h/2}^{+h/2} (e\, \sigma_T (x_T)\; x_T\, dx_T) \;=\; e \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_T (x_T)\; x_T\, d\, x_T)$$

$$M = e \int_{-h/2}^{+h/2} (\{[(2 A x + B) (x_T^2 - x\, x_T)) / (2 \sqrt{(Ax^2 + Bx + C)})] + [x_T \sqrt{(Ax^2 + Bx + C)}]\} dx_T)$$

$$M = e \{[(2 Ax + B) \Big[(x_T^3/3) - (x\, x_T^2/2)\Big]_{-h/2}^{+h/2} / (2 \sqrt{(Ax^2 + Bx + C)})] + [\sqrt{(Ax^2 + Bx + C)} \Big[(x_T^2 / 2)\Big]_{-h/2}^{+h/2}] \}$$

$$M = e [(2 Ax + B) h^3 / (24 \sqrt{(Ax^2 + Bx + C)})]$$

$$M = e\, h^3 [(2 Ax + B) / (24 \sqrt{(Ax^2 + Bx + C)})]$$

Vérification de l’équation du couple (M,N) :
On remplace A, B et C par leur expression, tout en élevant au carré N et M.

$$N^2 = \frac{e^2 h^2 (Bx + 2C)^2}{4(Ax^2 + Bx + C)} = \frac{e^2 h^2 (B^2x^2 + 4C^2 + 4BCx)}{4(Ax^2 + Bx + C)}$$

$$N^2 = \frac{e^2 h^2 \left(\dfrac{576\, \rho^2\, \overline{M}^2\, \overline{N}^2\, x^2}{e^4 h^8} + \dfrac{96\, \rho\, \overline{M}\, \overline{N}^3 x}{e^4 h^6} + \dfrac{4\, \overline{N}^4}{e^4 h^4} \right)}{4 \left(\dfrac{144\, \overline{M}^2\, x^2}{e^2 h^6} + \dfrac{24\, \rho\, \overline{M}\, \overline{N}\, x}{e^2 h^4} + \dfrac{\overline{N}^2}{e^2 h^2} \right)}$$

$$N^2 = \frac{\dfrac{144\, \rho^2\, \overline{M}^2\, \overline{N}^2\, x^2}{e^2 h^6} + \dfrac{24\, \rho\, \overline{M}\, \overline{N}^3 x}{e^2 h^4} + \dfrac{\overline{N}^4}{e^2 h^2}}{\dfrac{144\, \overline{M}^2\, x^2}{e^2 h^6} + \dfrac{24\, \rho\, \overline{M}\, \overline{N}\, x}{e^2 h^4} + \dfrac{\overline{N}^2}{e^2 h^2}}$$

$$M^2 = \frac{e^2 h^6 (2Ax + B)^2}{576\,(Ax^2 + Bx + C)} = \frac{e^2 h^6 (4A^2 x^2 + 4AB\,x + B^2)}{576\,(Ax^2 + Bx + C)}$$

$$M^2 = \frac{e^2 h^6 \left(\dfrac{82944\ \bar{M}^4 x^2}{e^4 h^{12}} + \dfrac{13824\,\rho\ \bar{M}^3\ \bar{N}\ x}{e^4 h^{10}} + \dfrac{576\,\rho^2\ \bar{N}^2\ \bar{M}^2}{e^4 h^8} \right)}{576 \left(\dfrac{144\ \bar{M}^2\ x^2}{e^2 h^6} + \dfrac{24\,\rho\ \bar{M}\ \bar{N}\ x}{e^2 h^4} + \dfrac{\bar{N}^2}{e^2 h^2} \right)}$$

$$M^2 = \frac{\dfrac{144\ \bar{M}^4 x^2}{e^2 h^6} + \dfrac{24\,\rho\ \bar{M}^3\ \bar{N}\ x}{e^2 h^4} + \dfrac{\rho^2\ \bar{M}^2\ \bar{N}^2}{e^2 h^2}}{\dfrac{144\ \bar{M}^2\ x^2}{e^2 h^6} + \dfrac{24\,\rho\ \bar{M}\ \bar{N}\ x}{e^2 h^4} + \dfrac{\bar{N}^2}{e^2 h^2}}$$

$$MN = \frac{e^2 h^4 (Bx + 2C)\,(2Ax + B)}{48\,(Ax^2 + Bx + C)} = \frac{e^2 h^4 (2AB\,x^2 + B^2 x + 4AC\,x + 2BC)}{48\,(Ax^2 + Bx + C)}$$

$$MN = \frac{48 \left(\dfrac{144\,\rho\ \bar{M}^3\ \bar{N}\ x^2}{e^2 h^6} + \dfrac{12\,\rho^2\ \bar{M}^2\ \bar{N}^2\ x}{e^2 h^4} + \dfrac{12\ \bar{M}^2\ \bar{N}^2\ x}{e^2 h^4} + \dfrac{\rho\ \bar{M}\ \bar{N}^3}{e^2 h^2} \right)}{48 \left(\dfrac{144\ \bar{M}^2\ x^2}{e^2 h^6} + \dfrac{24\,\rho\ \bar{M}\ \bar{N}\ x}{e^2 h^4} + \dfrac{\bar{N}^2}{e^2 h^2} \right)}$$

$$MN = \frac{\dfrac{144\,\rho\,\bar{M}^3\,\bar{N}\,x^2}{e^2\,h^6} + \dfrac{12\,\rho^2\,\bar{M}^2\,\bar{N}^2\,x}{e^2\,h^4} + \dfrac{12\,\bar{M}^2\,\bar{N}^2\,x}{e^2\,h^4} + \dfrac{\rho\,\bar{M}\,\bar{N}^3}{e^2\,h^2}}{\dfrac{144\,\bar{M}^2\,x^2}{e^2\,h^6} + \dfrac{24\,\rho\,\bar{M}\,\bar{N}\,x}{e^2\,h^4} + \dfrac{\bar{N}^2}{e^2\,h^2}}$$

$$(M/\bar{M})^2 + (N/\bar{N})^2 - 2\rho\,(NM/\bar{N}\,\bar{M}) = \frac{\dfrac{144\,\bar{M}^2\,x^2}{e^4\,h^6} + \dfrac{24\,\rho\,\bar{M}\,\bar{N}\,x}{e^2\,h^4} + \dfrac{\rho^2\,\bar{N}^2}{e^2\,h^2}}{\dfrac{144\,\bar{M}^2\,x^2}{e^2\,h^6} + \dfrac{24\,\rho\,\bar{M}\,\bar{N}\,x}{e^2\,h^4} + \dfrac{\bar{N}^2}{e^2\,h^2}}$$

$$+ \frac{\dfrac{144\,\rho^2\,\bar{M}^2\,x^2}{e^2\,h^6} + \dfrac{24\,\rho\,\bar{M}\,\bar{N}\,x}{e^2\,h^4} + \dfrac{\bar{N}^2}{e^2\,h^2}}{\dfrac{144\,\bar{M}^2\,x^2}{e^2\,h^6} + \dfrac{24\,\rho\,\bar{M}\,\bar{N}\,x}{e^2\,h^4} + \dfrac{\bar{N}^2}{e^2\,h^2}}$$

$$-2\rho\,\frac{\left(\dfrac{144\,\rho\,\bar{M}^2\,x^2}{\quad} + \dfrac{12\,\rho^2\,\bar{M}\,\bar{N}\,x}{e^2\,h^4} - + \dfrac{12\,\bar{M}\,\bar{N}\,x}{e^2\,h^4}\right) e^2\,h^6 \quad \dfrac{\rho\,\bar{N}^2}{e^2\,h^2}}{\dfrac{144\,\bar{M}^2\,x^2}{e^2\,h^6} + \dfrac{24\,\rho\,\bar{M}\,\bar{N}\,x}{e^2\,h^4} + \dfrac{\bar{N}^2}{e^2\,h^2}}$$

$$= 1 + \frac{\dfrac{\rho^2\ \bar{N}^2}{e^2\, h^2} + \dfrac{144\ \rho^2\ \bar{M}^2\ x^2}{e^2\, h^6} + \dfrac{24\,\rho\ \bar{M}\ \bar{N}\ x}{e^2\, h^4} - \dfrac{288\,\rho^2\ \bar{M}^2\ x^2}{e^2\, h^6} - \dfrac{24\,\rho^3\ \bar{M}\ \bar{N}\ x}{e^2\, h^4}}{\dfrac{144\ \bar{M}^2\, x^2}{e^2\, h^6} + \dfrac{24\,\rho\ \bar{M}\ \bar{N}\ x}{e^2\, h^4} + \dfrac{\bar{N}^2}{e^2\, h^2}}$$

$$+ \frac{-\dfrac{24\,\rho\ \bar{M}\ \bar{N}\ x}{e^2\, h^4} - \dfrac{2\rho^2\ \bar{N}^2}{e^2\, h^2}}{\dfrac{144\ \bar{M}^2\ x^2}{e^2\, h^6} + \dfrac{24\,\rho\ \bar{M}\ \bar{N}\ x}{e^2\, h^4} + \dfrac{\bar{N}^2}{e^2\, h^2}}$$

$$= 1 - \rho^2 \frac{\left(\dfrac{\bar{N}^2}{e^2\, h^2} + \dfrac{144\ \bar{M}^2\ x^2}{e^2\, h^6} + \dfrac{24\,\rho\ \bar{M}\ \bar{N}\ x}{e^2\, h^4}\right)}{\dfrac{144\ \bar{M}^2\ x^2}{e^2\, h^6} + \dfrac{24\,\rho\ \bar{M}\ \bar{N}\ x}{e^2\, h^4} + \dfrac{\bar{N}^2}{e^2\, h^2}}$$

$$= 1 - \rho^2$$

Soit $(M / \bar{M})^2 + (N / \bar{N})^2 - 2\rho\,(NM / \bar{N}\,\bar{M}) = 1 - \rho^2$ (Equation de l'ellipse)

<u>Conclusion</u> : les deux méthodes sont donc mathématiquement équivalentes

Laurent GUISSET
Bureau d'études SG Ingénierie
Rivesaltes

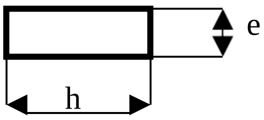
Méthode de combinaison modale pour deux paramètres à partir des contraintes normales en combinaison quadratique complète (CQC)

Objet : Les deux paramètres sont le moment fléchissant et l'effort normal pour le calcul des armatures longitudinales d'une section rectangulaire en béton armé.

Principe de la méthode : à partir des contraintes normales linéaires modales, on calcule la contrainte normale issue de la CQC des précédentes en tout point de la section ; puis on détermine la droite tangente à la courbe obtenue au point considéré avant d'obtenir le couple « probable » par intégration.
Nous allons démontrer que cette méthode est équivalente à la méthode générale qui passe par la détermination d'une ellipse d'équation : $(N/\bar{N})^2 + (M/\bar{M})^2 - 2\rho(NM/\bar{N}\bar{M}) = 1-\rho^2$

Démonstration :

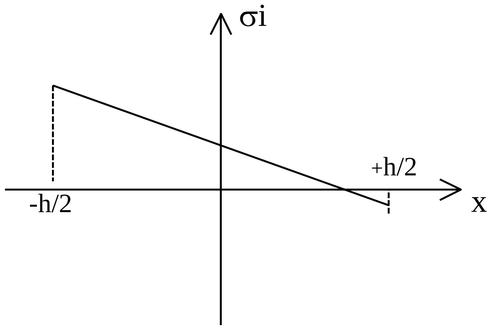
Notations :

- Ni et Mi = effort normal et moment fléchissant (pris avec leur signe) pour le mode i .
- Section BA : 

- $\bar{N} = \sqrt{(\Sigma i\ \Sigma j\ \beta ij\ Ni\ Nj)}$: CQC des efforts normaux
- $\bar{M} = \sqrt{(\Sigma i\ \Sigma j\ \beta ij\ Mi\ Mj)}$: CQC des moments fléchissants
- $\rho = (\Sigma i\ \Sigma j\ \beta ij\ Mi\ Nj) / (\bar{M}\ \bar{N})$: coefficient de corrélation entre les deux paramètres
- σi : contrainte normale linéaire pour le mode i
- σ : contrainte normale CQC
- σ_T : contrainte tangente à σ ; variable $=x_T$
- N et M : couple probable recherché

Équation des contraintes normales modales :

On suppose le repère centré sur le centre de gravité de la section



$\sigma i\ (x) = Ni/S + Mi\ x / I$

avec $S = eh$ (aire)

$I = (eh^3)/12$ (inertie)

soit $\sigma i\ (x) = (Ni/eh) + (12\ Mi\ x / (eh^3))$

Equation de la contrainte CQC :

$\sigma(x) = \sqrt{(\Sigma i\ \Sigma j\ \beta ij\ \sigma i\ \sigma j)}$

$= \sqrt{\{\Sigma i\ \Sigma j\ \beta ij\ [Ni/eh + 12\ Mi\ x / (eh^3)]\ .\ [Nj/eh + 12\ Mj\ x / (eh^3)]\}}$

$= \sqrt{\{\Sigma i\ \Sigma j\ \beta ij\ [(144\ Mi\ Mj\ x^2/(e^2 h^6)) + (Ni\ Nj / e^2h^2) + (12\ Mi\ Nj\ x / (e^2 h^4)) + (12\ Mj\ Ni\ x / (e^2 h^4)]\}}$

$= \sqrt{\{\Sigma i\ \Sigma j\ \beta ij\ [(144\ Mi\ Mj\ x^2/(e^2 h^6)) + (Ni\ Nj / e^2h^2) + (24\ Mi\ Nj\ x / (e^2 h^4)]\}}$

$= \sqrt{\{[144\ \bar{M}^2 x^2 / (e^2 h^6)] + [\bar{N}^2 / e^2h^2] + [24\ \rho\ \bar{M}\ \bar{N}\ x / (e^2 h^4)]\}}$

Posons: $A = 144\ \bar{M}^2 / (e^2 h^6)$

$B = 24\ \rho\ \bar{M}\ \bar{N} / (e^2 h^4)$

$C = \bar{N}^2 / e^2h^2$

On a donc: $\sigma(x) = \sqrt{(Ax^2 + Bx + C)}$

Equation de la contrainte tangente σ_T,tangente au point d'abscisse x :

$\sigma_T(x_T) = \sigma'(x)\ (x_T - x) + \sigma(x)$

avec $\sigma'(x) = (2\ A\ x + B) / [2\sqrt{(Ax^2 + Bx + C)}]$

soit $\sigma_T(x_T) = [(2\ A\ x + B)\ (x_T - x)) / (2\sqrt{(Ax^2 + Bx + C)})] + [\sqrt{(Ax^2 + Bx + C)}]$

Couple probable N et M :

On les obtient par intégration de σ_T

$$N = \int_{-h/2}^{+h/2} (e\ \sigma_T(x_T)\ dx_T) = e \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_T(x_T)\ dx_T)$$

$$N = e \int_{-h/2}^{+h/2} (\{[(2\ A\ x + B)\ (x_T - x)) / (2\sqrt{(Ax^2 + Bx + C)})] + [\sqrt{(Ax^2 + Bx + C)}]\}dx_T)$$

$$N = e\ \{[(2\ Ax + B)\ \Big[(x_T^2/2) - (x\ x_T)\Big]_{-h/2}^{+h/2} / (2\sqrt{(Ax^2 + Bx + C)})] + [\sqrt{(Ax^2 + Bx + C)}\ \Big[(x_T)\Big]_{-h/2}^{+h/2}]\}$$

$$N = e\ \{[(2\ Ax + B)\ (-x\ h) / (2\sqrt{(Ax^2 + Bx + C)})] + [(h)\sqrt{(Ax^2 + Bx + C)}]\}$$

$$N = e\ h\ [-x\ (2\ Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C)] / (2\sqrt{(Ax^2 + Bx + C)})$$

$$N = e\ h\ (Bx + 2C) / (2\sqrt{(Ax^2 + Bx + C)})$$

$$M = \int_{-h/2}^{+h/2} (e\,\sigma_{T}(x_T)\ x_T\, dx_T) \ = \ e \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_{T}(x_T)\ x_T\, d\, x_T)$$

$$M = e \int_{-h/2}^{+h/2} (\{[(2 A x + B) (x_T^2 - x x_T)) \ / (2 \sqrt{(Ax^2 + Bx + C)})] + [x_T \sqrt{(Ax^2 + Bx + C)}]\} dx_T)$$

$$M = e \{[(2 Ax + B) \Big[(x_T^3/3) - (x x_T^2/2)\Big]_{-h/2}^{+h/2} / (2 \sqrt{(Ax^2 + Bx + C)})] + [\sqrt{(Ax^2 + Bx + C)} \Big[(x_T^2 / 2)\Big]_{-h/2}^{+h/2}] \}$$

$$M = e [(2 Ax + B) h^3 / (24 \sqrt{(Ax^2 + Bx + C)})]$$

$$M = e h^3 [(2 Ax + B) / (24 \sqrt{(Ax^2 + Bx + C)})]$$

Vérification de l'équation du couple (M,N) :
On remplace A, B et C par leur expression, tout en élevant au carré N et M.

$$N^2 = \frac{e^2 h^2 (Bx + 2C)^2}{4(Ax^2 + Bx + C)} = \frac{e^2 h^2 (B^2x^2 + 4C^2 + 4BCx)}{4(Ax^2 + Bx + C)}$$

$$N^2 = \frac{e^2 h^2 \left(\dfrac{576\, \rho^2\, \overline{M}^2\, \overline{N}^2\, x^2}{e^4 h^8} + \dfrac{96\, \rho\, \overline{M}\, \overline{N}^3 x}{e^4 h^6} + \dfrac{4\, \overline{N}^4}{e^4 h^4} \right)}{4 \left(\dfrac{144\, \overline{M}^2\, x^2}{e^2 h^6} + \dfrac{24\, \rho\, \overline{M}\, \overline{N}\, x}{e^2 h^4} + \dfrac{\overline{N}^2}{e^2 h^2} \right)}$$

$$N^2 = \frac{\dfrac{144\, \rho^2\, \overline{M}^2\, \overline{N}^2\, x^2}{e^2 h^6} + \dfrac{24\, \rho\, \overline{M}\, \overline{N}^3 x}{e^2 h^4} + \dfrac{\overline{N}^4}{e^2 h^2}}{\dfrac{144\, \overline{M}^2\, x^2}{e^2 h^6} + \dfrac{24\, \rho\, \overline{M}\, \overline{N}\, x}{e^2 h^4} + \dfrac{\overline{N}^2}{e^2 h^2}}$$

$$M^2 = \frac{e^2 h^6 (2Ax + B)^2}{576\,(Ax^2 + Bx + C)} = \frac{e^2 h^6 (4A^2 x^2 + 4AB\,x + B^2)}{576\,(Ax^2 + Bx + C)}$$

$$M^2 = \frac{e^2 h^6 \left(\dfrac{82944\ \bar{M}^4 x^2}{e^4 h^{12}} + \dfrac{13824\,\rho\ \bar{M}^3\ \bar{N}\ x}{e^4 h^{10}} + \dfrac{576\,\rho^2\ \bar{N}^2\ \bar{M}^2}{e^4 h^8} \right)}{576 \left(\dfrac{144\ \bar{M}^2\ x^2}{e^2 h^6} + \dfrac{24\,\rho\ \bar{M}\ \bar{N}\ x}{e^2 h^4} + \dfrac{\bar{N}^2}{e^2 h^2} \right)}$$

$$M^2 = \frac{\dfrac{144\ \bar{M}^4 x^2}{e^2 h^6} + \dfrac{24\,\rho\ \bar{M}^3\ \bar{N}\ x}{e^2 h^4} + \dfrac{\rho^2\ \bar{M}^2\ \bar{N}^2}{e^2 h^2}}{\dfrac{144\ \bar{M}^2\ x^2}{e^2 h^6} + \dfrac{24\,\rho\ \bar{M}\ \bar{N}\ x}{e^2 h^4} + \dfrac{\bar{N}^2}{e^2 h^2}}$$

$$MN = \frac{e^2 h^4 (Bx + 2C)(2Ax + B)}{48\,(Ax^2 + Bx + C)} = \frac{e^2 h^4 (2AB\,x^2 + B^2 x + 4AC\,x + 2BC)}{48\,(Ax^2 + Bx + C)}$$

$$MN = \frac{48 \left(\dfrac{144\,\rho\ \bar{M}^3\ \bar{N}\ x^2}{e^2 h^6} + \dfrac{12\,\rho^2\ \bar{M}^2\ \bar{N}^2\ x}{e^2 h^4} + \dfrac{12\ \bar{M}^2\ \bar{N}^2\ x}{e^2 h^4} + \dfrac{\rho\ \bar{M}\ \bar{N}^3}{e^2 h^2} \right)}{48 \left(\dfrac{144\ \bar{M}^2\ x^2}{e^2 h^6} + \dfrac{24\,\rho\ \bar{M}\ \bar{N}\ x}{e^2 h^4} + \dfrac{\bar{N}^2}{e^2 h^2} \right)}$$

$$MN = \frac{\dfrac{144\,\rho\,\bar{M}^3\,\bar{N}\,x^2}{e^2\,h^6} + \dfrac{12\,\rho^2\,\bar{M}^2\,\bar{N}^2\,x}{e^2\,h^4} + \dfrac{12\,\bar{M}^2\,\bar{N}^2\,x}{e^2\,h^4} + \dfrac{\rho\,\bar{M}\,\bar{N}^3}{e^2\,h^2}}{\dfrac{144\,\bar{M}^2\,x^2}{e^2\,h^6} + \dfrac{24\,\rho\,\bar{M}\,\bar{N}\,x}{e^2\,h^4} + \dfrac{\bar{N}^2}{e^2\,h^2}}$$

$$(M / \bar{M})^2 + (N / \bar{N})^2 - 2\rho\,(NM / \bar{N}\,\bar{M}) = \frac{\dfrac{144\,\bar{M}^2\,x^2}{e^4\,h^6} + \dfrac{24\,\rho\,\bar{M}\,\bar{N}\,x}{e^2\,h^4} + \dfrac{\rho^2\,\bar{N}^2}{e^2\,h^2}}{\dfrac{144\,\bar{M}^2\,x^2}{e^2\,h^6} + \dfrac{24\,\rho\,\bar{M}\,\bar{N}\,x}{e^2\,h^4} + \dfrac{\bar{N}^2}{e^2\,h^2}}$$

$$+ \frac{\dfrac{144\,\rho^2\,\bar{M}^2\,x^2}{e^2\,h^6} + \dfrac{24\,\rho\,\bar{M}\,\bar{N}\,x}{e^2\,h^4} + \dfrac{\bar{N}^2}{e^2\,h^2}}{\dfrac{144\,\bar{M}^2\,x^2}{e^2\,h^6} + \dfrac{24\,\rho\,\bar{M}\,\bar{N}\,x}{e^2\,h^4} + \dfrac{\bar{N}^2}{e^2\,h^2}}$$

$$-2\rho\,\frac{\left(\dfrac{144\,\rho\,\bar{M}^2\,x^2}{\qquad} + \dfrac{12\,\rho^2\,\bar{M}\,\bar{N}\,x}{e^2\,h^4} + \dfrac{12\,\bar{M}\,\bar{N}\,x}{e^2\,h^4}\right)e^2\,h^6 \quad \dfrac{\rho\,\bar{N}^2}{e^2\,h^2}}{\dfrac{144\,\bar{M}^2\,x^2}{e^2\,h^6} + \dfrac{24\,\rho\,\bar{M}\,\bar{N}\,x}{e^2\,h^4} + \dfrac{\bar{N}^2}{e^2\,h^2}}$$

$$= 1 + \frac{\dfrac{\rho^2\ \bar{N}^2}{e^2 h^2} + \dfrac{144\ \rho^2\ \bar{M}^2\ x^2}{e^2 h^6} + \dfrac{24\,\rho\ \bar{M}\ \bar{N}\ x}{e^2 h^4} - \dfrac{288\,\rho^2\ \bar{M}^2\ x^2}{e^2 h^6} - \dfrac{24\,\rho^3\ \bar{M}\ \bar{N}\ x}{e^2 h^4}}{\dfrac{144\ \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \dfrac{24\,\rho\ \bar{M}\ \bar{N}\ x}{e^2 h^4} + \dfrac{\bar{N}^2}{e^2 h^2}}$$

$$+ \frac{- \dfrac{24\,\rho\ \bar{M}\ \bar{N}\ x}{e^2 h^4} - \dfrac{2\rho^2\ \bar{N}^2}{e^2 h^2}}{\dfrac{144\ \bar{M}^2\ x^2}{e^2 h^6} + \dfrac{24\,\rho\ \bar{M}\ \bar{N}\ x}{e^2 h^4} + \dfrac{\bar{N}^2}{e^2 h^2}}$$

$$= 1- \rho^2 \frac{\left(\dfrac{\bar{N}^2}{e^2 h^2} + \dfrac{144\ \bar{M}^2\ x^2}{e^2 h^6} + \dfrac{24\,\rho\ \bar{M}\ \bar{N}\ x}{e^2 h^4} \right)}{\dfrac{144\ \bar{M}^2\ x^2}{e^2 h^6} + \dfrac{24\,\rho\ \bar{M}\ \bar{N}\ x}{e^2 h^4} + \dfrac{\bar{N}^2}{e^2 h^2}}$$

$$= 1- \rho^2$$

Soit $(M / \bar{M})^2 + (N / \bar{N})^2 - 2\rho\,(NM / \bar{N}\ \bar{M}) = 1- \rho^2$ (Equation de l'ellipse)

<u>**Conclusion**</u> : les deux méthodes sont donc mathématiquement équivalentes

Laurent GUISSET

Bureau d'études SG Ingénierie

Rivesaltes