



Compléments techniques

Version 19

**Calcul des bâtiments
contreventés par des murs
en béton ou en maçonnerie**

Descente de charges,
Vent, Séisme, Ferrailage

Selon les Eurocodes

Avril 2023

Michel Hénin

Ingénieur E.N.P.C.

Docteur-Ingénieur

Version 19

Avril 2023

ÉPICENTRE

Compléments techniques

Calcul des bâtiments contreventés par des murs en béton ou en maçonnerie

Descente de charges,
Vent, Séisme, Ferrailage

Selon les Eurocodes

Compte tenu de la complexité, de la technicité et de la multiplicité des algorithmes mis en œuvre par le logiciel, l'auteur ne peut garantir que celui-ci est exempt d'erreurs. Il n'est pas non plus exclu que le projet calculé puisse comporter lui-même des erreurs de modélisation ou de saisie.

Après chaque calcul, il appartient donc à l'utilisateur de contrôler soigneusement l'ordre de grandeur et la cohérence des résultats obtenus. En cas d'anomalie ou de suspicion d'anomalie, il est demandé à l'utilisateur de vérifier son modèle puis, si celui-ci lui paraît correct, de signaler sans tarder l'anomalie à l'auteur du logiciel.

SOMMAIRE

1. BIENVENUE !	1
1.1. Organisation de la documentation d'Épicentre	1
1.2. Si vous n'avez jamais utilisé Épicentre	2
1.3. Utilisez les ressources du site Internet	2
1.4. Support technique	3
1.5. Vos suggestions sont les bienvenues.....	3
 2. CALCUL SISMIQUE PAR LA MÉTHODE DE L'ANALYSE MODALE SPECTRALE	 5
2.1. Équations de base du mouvement vibratoire du bâtiment.....	5
2.2. Facteur de participation, masses modales	6
2.3. Propriétés des facteurs de participation et des masses modales	7
2.4. Facteurs de participation de torsion, moments d'inertie massique modaux	8
2.5. Facteurs de direction modale	8
2.6. Analyse modale, troncature de la base modale, mode résiduel	9
2.7. Calcul sismique par la méthode de l'analyse modale spectrale.....	10
 3. CALCUL SISMIQUE SELON L'EUROCODE 8-1	 11
3.1. Méthode d'analyse mise en œuvre par Épicentre	11
3.2. Paramètres du calcul sismique.....	12
3.3. Hypothèses de calcul complémentaires	14
3.4. Calcul pratique.....	14
3.5. Contraintes de cisaillement dans les murs	14
3.6. Déplacements horizontaux	15
3.7. Ferrailage des murs en béton selon l'EC2-1-1 et l'EC8-1	15
3.8. Vérification des murs en maçonnerie selon l'EC6-1-1 et l'EC8-1	15
 4. FERRAILAGE DES MURS EN BÉTON APRÈS UN CALCUL STATIQUE	 17
4.1. Introduction.....	17
4.2. Distinction entre murs non armés et murs armés	18
4.3. Calcul des armatures verticales de flexion composée	18
4.4. Détermination des diagrammes de béton comprimé	20
4.5. Association des calculs de flexion composée et de vérification des zones comprimées	20

4.6. Vérification des zones de béton comprimé	22
4.7. Armatures horizontales d'effort tranchant	24
4.8. Armatures verticales de couture au droit des reprises de bétonnage	25
4.9. Sections complexes, introduction des plans de contreventement	25
4.10. Changements de section, appuis entre murs, poutres-voiles.....	26
5. FERRAILLAGE DES MURS EN BÉTON APRÈS UN CALCUL SISMIQUE DYNAMIQUE	27
5.1. Introduction	27
5.2. Armatures verticales de flexion composée.....	28
5.3. Vérification des zones de béton comprimé	31
5.4. Armatures horizontales d'effort tranchant	32
5.5. Armatures de couture au droit des reprises de bétonnage	33
5.6. Sections complexes, changements de section, appuis entre murs, poutres-voiles.....	34
6. VÉRIFICATION DES MURS EN MAÇONNERIE APRÈS UN CALCUL STATIQUE OU DYNAMIQUE	35
6.1. Introduction	35
6.2. Vérification de la flexion composée.....	36
6.3. Vérification des zones de maçonnerie comprimée.....	37
6.4. Vérification d'effort tranchant.....	39
6.5. Sections complexes, changements de section, appuis entre murs, poutres-cloisons	39
6.6. Flexion composée et flambement des zones comprimées : cas de la superposition de murs en matériaux différents (notamment maçonnerie sur béton).....	40
7. CONFORMITÉ D'ÉPICENTRE AVEC LA MÉTHODE DE L'ELLIPSOÏDE POUR LA COMBINAISON DES EFFORTS INTERNES DES MURS	41
7.1. Combinaison des efforts internes issus de la superposition modale	41
7.2. La méthode de l'ellipsoïde.....	41
7.3. La méthode mise en œuvre par Épicentre est équivalente à la méthode de l'ellipsoïde	41
7.4. La démonstration de Laurent Guisset	41

1. BIENVENUE !

1.1. Organisation de la documentation d'Épicentre

La documentation d'Épicentre vous est proposée sous trois formes complémentaires présentées ci-dessous.

1.1.1. La documentation de base d'Épicentre

Il s'agit de documents destinés à être lus, au moins partiellement, pour avoir une vue d'ensemble du logiciel, pour comprendre comment il fonctionne et pour l'utiliser efficacement

La documentation de base d'Épicentre est organisée en cinq documents complémentaires :

10 bonnes raisons d'utiliser Épicentre

Le document met l'accent sur les spécificités du logiciel, notamment les fonctionnalités qu'il est le seul logiciel du marché à proposer.

Guide d'installation

Il vous indique comment installer et mettre à jour Épicentre.

Visite guidée du logiciel

Elle vous donne une vue d'ensemble d'Épicentre, grâce à une fiche descriptive détaillée et à un parcours illustré et commenté des modules du logiciel, à partir d'un modèle simple.

Manuel de l'utilisateur

Il rassemble toutes les explications et informations pratiques qui vont vous permettre de saisir vos projets, de lancer les traitements et d'en exploiter les résultats.

Compléments techniques

Ce document rassemble des informations à caractère plus théorique sur les méthodes de calcul mises en œuvre par Épicentre : méthode de l'analyse modale spectrale, vérification et ferrailage des murs, etc.

1.1.2. L'aide en ligne

Le logiciel est organisé de manière claire et vous offre une navigation fluide et intuitive.

L'aide en ligne vous accompagne constamment pour vous aider ponctuellement, là où vous en avez besoin et au moment où vous en avez besoin.

L'intégralité des fonctionnalités du logiciel vous sont proposées dans des menus déroulants ou par des boutons identifiés par des textes en clair (pas de ribambelles de boutons graphiques aux fonctions mystérieuses !).

Les modules de saisie graphique actionnent de nombreux assistants de saisie qui vous guident étape par étape.

Toutes les feuilles de saisie et boîtes de dialogue sont équipées de commentaires et d'explications qui vous précisent la nature des informations attendues.

Les clauses des Eurocodes directement concernées par la saisie en cours sont systématiquement précisées afin que vous puissiez vous y rapporter si vous le souhaitez.

Lorsque c'est utile, des boutons « Aide... » ou « Pour en savoir plus... » vous permettent d'afficher une feuille explicative spécifique.

Le logiciel vous informe des saisies incomplètes ou invalides et vous donne les informations utiles pour interpréter les résultats non conformes.

1.1.3. Les documents pédagogiques (notes techniques de la série « Théorie et pratique »)

L'objet des notes techniques de la série « Théorie et pratique » est de donner les notions de base indispensables aux utilisateurs d'Épicentre qui abordent pour la première fois le calcul des bâtiments contreventés par des murs et le calcul sismique dynamique.

Ces notes peuvent être téléchargées à partir du site Internet du logiciel à l'adresse suivante : <https://www.logiciel-epicentre.com/doc/infos-doc.htm>.

Plusieurs titres sont disponibles, parmi lesquels :

- Contreventement des bâtiments : notions de base sur les systèmes de contreventement constitués de murs reliés par des linteaux
- Calculs sismiques dynamiques avec Épicentre : notions de base sur le calcul sismique dynamique des bâtiments avec la méthode de l'analyse modale spectrale
- Ferrailage des murs en béton par ÉPICENTRE : présentation des modules de ferrailage d'ÉPICENTRE (méthodes de calcul et présentation des résultats)

1.2. Si vous n'avez jamais utilisé Épicentre

Épicentre est facile et agréable à utiliser, une fois qu'on a assimilé ses principes.

Pour avoir une vue d'ensemble du logiciel, **lisez la visite guidée du chapitre 3 de la Présentation d'Épicentre** (« premiers essais, découverte du logiciel ») et lancez les traitements sur les exemples du dossier d'installation : vous aurez ainsi rapidement une bonne idée de la manière dont le logiciel fonctionne.

Ensuite, lisez avec attention les sections suivantes du Manuel de l'utilisateur avant d'entamer la mise en données de votre premier bâtiment :

- chapitre 3 (Présentation générale) : il vous donnera une vue d'ensemble du logiciel (objet du programme, domaine d'utilisation, modules de calculs, saisie des données, résultats produits),
- chapitre 4 (Saisie d'un projet : opérations préparatoires) : le lire attentivement pour préparer la saisie de votre premier projet.

Si vous êtes peu familier avec le calcul des contreventements par murs ou avec le calcul sismique des bâtiments, **reportez-vous à la section « théorie et pratique » du site Internet** : vous y trouverez des fiches pédagogiques au format pdf donnant une présentation progressive et structurée des notions qui vous seront indispensables pour utiliser efficacement le logiciel.

Il est impératif de lire attentivement les annexes 1 (module de description des porteurs verticaux et des linteaux) et 2 (module de description détaillée des planchers) du Manuel de l'utilisateur avant de commencer à travailler dans les deux modules de saisie.

Ces annexes donnent les quelques clés **INDISPENSABLES** pour que vous puissiez utiliser ces outils sans tâtonner ou passer à côté de points essentiels.

Pour construire votre premier fichier de données, inspirez-vous des exemples livrés avec Épicentre (dossier « exemples ») et travaillez en vous reportant en cas de besoin au manuel de l'utilisateur ou à l'aide en ligne.

AU moment de l'exploitation des résultats, **lisez attentivement les messages explicatifs** qui vous accompagneront lorsque vous travaillerez dans les modules graphiques de présentation des résultats.

Vous pourrez aussi prendre connaissance des explications plus détaillées données par les chapitres 9 à 15 du présent document, consacrés à l'exploitation des résultats.

Si vous voulez en savoir plus sur les méthodes de calcul utilisées par Épicentre, reportez vous aux Compléments techniques (analyse modale spectrale, dimensionnement des ferrailages).

Un dernier conseil : lors de la saisie de votre premier projet, fixez-vous comme objectif d'élaborer une première version correspondant à une structure volontairement très simplifiée, que vous compliquerez ensuite si c'est nécessaire. Évitez soigneusement de faire le contraire !

1.3. Utilisez les ressources du site Internet

Le site <http://www.logiciel-epicentre.com> est destiné d'une part aux utilisateurs actuels d'Épicentre et d'autre part à tous ceux qui veulent en savoir plus sur ce logiciel.

Pour vous connecter rapidement au site Internet d'Épicentre, vous pouvez utiliser la commande « Connexion à www.logiciel-epicentre.com » du menu Aide du logiciel.

Le site est organisé en trois sections :

L'espace Utilisateurs

Vous y trouverez une présentation détaillée des différentes formules d'abonnement proposées, avec leur tarif.

En cas de besoin, vous pourrez aussi télécharger manuellement la dernière mise à jour intermédiaire disponible (voir le § 3.2 du présent document).

L'espace Découverte

Cette section est destinée à tous ceux qui souhaitent s'informer sur Épicentre. Elle propose de très nombreuses informations sur le logiciel, son domaine d'utilisation, ses fonctionnalités.

L'espace Infos & Doc

La rubrique Théorie et Pratique contient plusieurs notes techniques rappelant les notions de base sur des sujets liés au domaine d'utilisation d'Épicentre : **contreventement par murs, calcul dynamique, calcul sismique, ferrailage des murs**. Ces notes insistent sur les aspects pratiques : elles ont pour but d'aider les débutants dans ces domaines de calcul à démarrer en ayant en tête les points essentiels.

1.4. Support technique

Le support technique a pour mission de vous accompagner si vous rencontrez des difficultés dans l'utilisation du logiciel :

- vérification des configurations matérielles ou logicielles
- problèmes lors de l'installation ou du téléchargement des mises à jour intermédiaires
- conseils ou accompagnement lors de la modélisation
- récupération de fichiers endommagés
- résolution et/ou contournement de bugs

Contactez le support en adressant un mail à support@logiciel-epicentre.com (joignez le fichier du modèle concerné par votre question).

1.5. Vos suggestions sont les bienvenues

Le logiciel Épicentre est fait pour vous !

Aidez l'équipe de développement à l'améliorer pour qu'il vous rende les meilleurs services possibles :

- alertez le sur les défauts de fonctionnement que vous pourriez constater (ils seront corrigés rapidement)
- signalez les erreurs, les omissions ou les ambiguïtés de la notice d'utilisation
- suggérez des idées d'amélioration des fonctionnalités du logiciel

L'équipe de développement se tient à votre écoute et est prête à tenir le plus grand compte des remarques ou suggestions que vous pourrez lui faire : n'hésitez pas à prendre contact avec elle (support@logiciel-epicentre.com).

D'avance, Merci !

2. CALCUL SISMIQUE PAR LA MÉTHODE DE L'ANALYSE MODALE SPECTRALE

2.1. Équations de base du mouvement vibratoire du bâtiment

Considérons un bâtiment modélisé comme suit :

- masses et moments d'inertie massiques concentrés aux centres de gravité G_i des n étages
- 3 degrés de liberté par étage (translation horizontale des G_i et torsion d'ensemble)

Supposons que la base de ce bâtiment soit soumise à un mouvement sismique horizontal s'exerçant dans une direction déterminée.

Soit ϕ l'angle de cette direction avec l'axe OX d'un repère $(OXYZ)$ fixe.

Le mouvement sismique appliqué à la base de l'immeuble est caractérisé par son amplitude $v(t)$ par rapport à ce repère fixe.

Soit $D(t)$ le vecteur des déplacements relatifs des G_i en fonction du temps, par rapport à un repère mobile lié à la base du bâtiment.

À tout instant, le déplacement absolu $D_a(t)$ des G_i par rapport au repère fixe se déduit de $D(t)$ par une translation horizontale de composantes $v(t) \cos(\phi)$, $v(t) \sin(\phi)$.

Nous pouvons noter : $D_a(t) = D(t) + v(t) \cdot U_\phi$

U_ϕ est un vecteur de dimension $3n$ associé à la direction ϕ et de composantes $(\cos(\phi), \sin(\phi), 0, \cos(\phi), \sin(\phi), 0, \dots)$.

Le vecteur des efforts d'inertie développés par les masses et les moments d'inertie massiques des étages (M_i et J_i) est égal à $M D_a''(t)$, c'est à dire à $M D''(t) + v''(t) M U_\phi$ (M est la matrice des masses généralisées, c'est à dire la matrice diagonale des M_i, J_i).

Ces efforts d'inertie sont équilibrés par les efforts internes et les efforts dus aux frottements (supposés proportionnels à la vitesse de chaque degré de liberté dans le repère mobile) :

$$M D''(t) + v''(t) M U_\phi + K D(t) + C D'(t) = 0 \quad (K \text{ est la matrice de rigidité} \\ \text{et } C \text{ la matrice d'amortissement})$$

ou encore...

$$M D''(t) + C D'(t) + K D(t) = -v''(t) M U_\phi \quad (1)$$

Nous pouvons décomposer $D(t)$ sur la base formée par les $3n$ vecteurs modaux Φ_i du bâtiment :

$$D(t) = \sum y_i(t) \Phi_i$$

En multipliant (1) à gauche par Φ_j^t ($1 \leq j \leq 3n$) et en remplaçant $D(t)$ par $\sum y_i(t) \Phi_i$, nous obtenons les $3n$ équations suivantes :

$$\sum \Phi_j^t M \Phi_i y_i''(t) + \sum \Phi_j^t C \Phi_i y_i'(t) + \sum \Phi_j^t K \Phi_i y_i(t) = -v''(t) \Phi_j^t M U_\phi$$

Du fait des propriétés d'orthogonalité des vecteurs modaux Φ_i , les produits $\Phi_j^t M \Phi_i$, $\Phi_j^t K \Phi_i$ et $\Phi_j^t C \Phi_i$, sont nuls si $i \neq j$.

Les 3n équations deviennent :

$$\Phi_j^t M \Phi_j y_j''(t) + \Phi_j^t C \Phi_j y_j'(t) + \Phi_j^t K \Phi_j y_j(t) = -v''(t) \Phi_j^t M U_\phi \quad (1 \leq j \leq 3n)$$

Posant $m_j = \Phi_j^t M \Phi_j$, $k_j = \Phi_j^t K \Phi_j$ et $c_j = \Phi_j^t C \Phi_j$, nous écrivons :

$$m_j y_j''(t) + c_j y_j'(t) + k_j y_j(t) = -v''(t) \Phi_j^t M U_\phi \quad (1 \leq j \leq 3n)$$

ou encore, en posant :

$$\omega_j^2 = k_j / m_j, \quad \xi_j = c_j / 2m_j \omega_j$$

$$\text{et...} \quad P_j(\phi) = \Phi_j^t M U_\phi / \Phi_j^t M \Phi_j = \Phi_j^t M U_\phi / m_j$$

$$y_j''(t) + 2\xi_j \omega_j y_j'(t) + \omega_j^2 y_j(t) = -v''(t) P_j(\phi) \quad (1 \leq j \leq 3n)$$

Nous reconnaissons dans cette équation l'équation classique régissant le comportement d'un oscillateur simple de pulsation ω_j soumis à une accélération extérieure variable.

Nous constatons que chacune de ces 3n équations en $y_j(t)$ est indépendante et que la pulsation ω_j est bien celle du mode propre de rang j associé ($\omega_j^2 = \Phi_j^t K \Phi_j / \Phi_j^t M \Phi_j$).

Rappelons que nous avons exprimé le vecteur des déplacements relatifs en fonction des 3n modes propres du bâtiment :

$$D(t) = \sum y_j(t) \Phi_j$$

Le mouvement vibratoire du bâtiment est donc la superposition des mouvements vibratoires découplés des 3n modes propres du bâtiment, réagissant indépendamment les uns des autres à l'action sismique de direction ϕ .

2.2. Facteur de participation, masses modales

La quantité $P_j(\phi)$, appelée **facteur de participation du mode j selon la direction ϕ** , caractérise la réponse du mode j à une excitation extérieure de direction ϕ .

La valeur de $P_j(\phi)$ ne dépend que de l'angle ϕ , de la déformée propre Φ_j et **du type de normalisation** de cette dernière (si on multiplie Φ_j par k, $P_j(\phi)$ est divisé par k).

$$\text{Introduisons } \mathcal{M}_j(\phi) = (\Phi_j^t M U_\phi)^2 / \Phi_j^t M \Phi_j = \Phi_j^t M \Phi_j \cdot P_j(\phi)^2 = m_j P_j(\phi)^2$$

$\mathcal{M}_j(\phi)$ a la dimension d'une masse et est appelée **masse modale effective du mode i pour la direction ϕ** .

On peut montrer que $\mathcal{M}_j(\phi)$ représente la part de la masse totale vibrant dans le mode de rang j lorsqu'il est excité par un séisme de direction ϕ .

On peut aussi montrer que **la somme des masses modales effectives de tous les modes pour une direction donnée est égale à la masse totale**.

2.3. Propriétés des facteurs de participation et des masses modales

Le but de ce paragraphe est de démontrer quelques résultats originaux que nous utiliserons par la suite et qui concernent les facteurs de participation et les masses modales effectives.

Rappelons que...

- le facteur de participation du mode j pour la direction ϕ est :

$$P_j(\phi) = \Phi_j^t M U_\phi / \Phi_j^t M \Phi_j = \Phi_j^t M U_\phi / m_j$$

- la masse modale effective du mode j pour la direction ϕ est :

$$\mathcal{M}_j(\phi) = m_j P_j(\phi)^2$$

(avec $m_j = \Phi_j^t M \Phi_j$. Remarquons que $m_j = 1$ si les Φ_j ont été normés par rapport aux masses)

Les composantes de U_ϕ étant $(\cos(\phi), \sin(\phi), 0, \cos(\phi), \sin(\phi), 0, \dots)$, celles de U_0 sont $(1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$ et celles de $U_{\pi/2}$ sont $(0, 1, 0, 0, 1, 0, \dots)$.

Nous pouvons donc écrire $U_\phi = \cos(\phi) U_0 + \sin(\phi) U_{\pi/2}$

Ce qui entraîne $P_j(\phi) = \cos(\phi) P_j(0) + \sin(\phi) P_j(\pi/2)$

Dérivant par rapport à ϕ , nous trouvons $P_j'(\phi) = -\sin(\phi) P_j(0) + \cos(\phi) P_j(\pi/2)$

Les extrema de $P_j(\phi)$ correspondent aux valeurs ϕ_e de ϕ qui annulent $P_j'(\phi) \dots$

$$\phi_e = \arctg (P_j(\pi/2) / P_j(0)) \quad [\pi]$$

Les minima sont les opposés des maxima : en effet $P_j(\phi_e) = -P_j(\phi_e + \pi)$

Les facteurs de participation des directions perpendiculaires aux directions des extrema sont nuls :

$$P_j(\phi_e + \pi/2) = 0$$

En effet $P_j(\phi_e + \pi/2) = \cos(\phi_e + \pi/2) P_j(0) + \sin(\phi_e + \pi/2) P_j(\pi/2)$

$$P_j(\phi_e + \pi/2) = -\sin(\phi_e) P_j(0) + \cos(\phi_e) P_j(\pi/2) = P_j'(\phi_e) = 0$$

Les masses modales effectives $\mathcal{M}_j(\phi) = m_j P_j(\phi)^2$ sont donc...

- maximum pour ϕ_e [0]
- nulles pour $\phi_e + \pi/2$ [0] ...

Nous allons maintenant démontrer que la somme des masses modales effectives d'un mode pour deux directions perpendiculaires quelconques est égale à la masse modale effective maximum du mode.

Par définition, $\mathcal{M}_j(\phi_e) = m_j P_j(\phi_e)^2$.

Comme $P_j'(\phi_e) = 0$ (extremum), nous pouvons écrire...

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_j(\phi_e) &= m_j P_j(\phi_e)^2 + m_j P_j'(\phi_e)^2 \\ &= m_j (\cos(\phi_e) P_j(0) + \sin(\phi_e) P_j(\pi/2))^2 + m_j (-\sin(\phi_e) P_j(0) + \cos(\phi_e) P_j(\pi/2))^2 \\ &= m_j P_j(0)^2 + m_j P_j(\pi/2)^2 = \mathcal{M}_j(0) + \mathcal{M}_j(\pi/2) \end{aligned}$$

Cette relation est valable quel que soit le choix du repère OXY fixe, donc pour deux directions perpendiculaires quelconques.

2.4. Facteurs de participation de torsion, moments d'inertie massique modaux

Les facteurs de participation mis en évidence précédemment caractérisent la réponse des composantes de flexion des modes propres j à une sollicitation sismique.

Mais un séisme excitera généralement aussi les composantes de torsion de chacun des modes propres, pour lesquels nous définirons :

- des facteurs de participation de torsion $P_{\theta j} = \Phi_j^t M U_{\theta} / \Phi_j^t M \Phi_j = \Phi_j^t M U_{\theta} / m_j$ ($1 \leq j \leq m$)
- des moments d'inertie massique modaux $J_j = m_j \cdot P_{\theta j}^2$ ($1 \leq j \leq m$)

avec...

$$m_j = \Phi_j^t M \Phi_j \quad (m_j = 1 \text{ si les } \Phi_j \text{ ont été normés par rapport aux masses})$$

$$U_{\theta} = (0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots, 0, 0, 1)$$

La somme des moments d'inertie massique modaux de l'ensemble des modes est égale au moment d'inertie massique total du bâtiment (c'est à dire la somme des inerties massiques de tous les étages).

Les modes propres à torsion prépondérante auront bien entendu un grand moment d'inertie massique modal (représentant un pourcentage élevé du moment d'inertie massique total).

2.5. Facteurs de direction modale

Nous avons considéré précédemment que les bâtiments modélisés comportent 3 degrés de liberté par étage :

- les 2 composantes suivant OX et OY du déplacement horizontal du centre de gravité de l'étage
- l'angle de torsion au niveau de l'étage

On peut généralement classer grossièrement les modes propres de vibration d'un bâtiment en trois catégories, d'après « l'allure » de leur déformée : d'une part les modes de vibration à torsion prépondérante et d'autre part deux familles de modes de vibration à flexion prépondérante, orientées selon deux directions quasi-orthogonales.

Cette classification des modes propres d'un bâtiment donné facilite l'interprétation des résultats d'une analyse modale : elle permet par exemple de repérer pour chaque « catégorie » le mode qui joue le rôle de mode fondamental, et ainsi de mieux comprendre comment fonctionne le bâtiment. On parlera ainsi du « premier mode de torsion », même si ce mode incorpore aussi des composantes de flexions, non prépondérantes.

Cette classification permet aussi de vérifier qu'un nombre suffisant de modes propres a été calculé pour chaque catégorie (flexion prépondérante, torsion prépondérante).

En pratique, l'introduction des **facteurs de direction modale** facilite cette classification des modes propres en fonction de l'allure de leur déformée. Ils caractérisent en effet la contribution relative de chaque degré de liberté (translation/OX, translation/OY, torsion) dans la déformée d'un mode propre donné et ceci sous la forme d'un pourcentage : il sera ainsi possible de dire que tel mode propre est gouverné à raison de 5% par la translation suivant OX, 64% par la translation suivant OY et 31% par la torsion (la somme des facteurs de direction modale d'un mode donné est bien entendu égale à 100%).

Dans les paragraphes précédents nous avons introduit, pour chaque mode propre de déformée modale Φ , la quantité suivante m , appelée masse généralisée du mode :

$$m = \Phi^t M \Phi \quad (m = 1 \text{ si les } \Phi \text{ ont été normés par rapport aux masses; } M \text{ est la matrice des masses et des moments d'inertie massique des étages})$$

Concrètement, si nous notons x_i , y_i et θ_i les déplacements, selon les 3 degrés de liberté, du centre de gravité de l'étage i (de masse m_i et de moment d'inertie massique j_i) :

$$m = \sum m_i \cdot x_i^2 + \sum m_i \cdot y_i^2 + \sum j_i \cdot \theta_i^2$$

Par définition les trois facteurs de direction modale du mode considéré seront :

$$F_x = \sum m_i \cdot x_i^2 / (\sum m_i \cdot x_i^2 + \sum m_i \cdot y_i^2 + \sum j_i \cdot \theta_i^2) \quad (\text{exprimé en pourcentage})$$

$$F_y = \sum m_i \cdot y_i^2 / (\sum m_i \cdot x_i^2 + \sum m_i \cdot y_i^2 + \sum j_i \cdot \theta_i^2) \quad (\text{exprimé en pourcentage})$$

$$\mathcal{F}_\theta = \sum j_i \cdot \theta_i^2 / (\sum m_i \cdot x_i^2 + \sum m_i \cdot y_i^2 + \sum j_i \cdot \theta_i^2) \quad (\text{exprimé en pourcentage})$$

Nous aurons bien entendu : $\mathcal{F}_x + \mathcal{F}_y + \mathcal{F}_\theta = 1$ (soit 100%)

2.6. Analyse modale, troncature de la base modale, mode résiduel

Analyse modale

L'analyse modale d'une structure est l'opération qui consiste à rechercher les caractéristiques des modes propres de cette structure.

ÉPICENTRE utilise pour cela une méthode de calcul itérative, la méthode de Vianello-Stodola (détaillée en annexe C5.4 des règles PS 69), qui recherche les modes propres les uns après les autres, en commençant par ceux de plus grandes périodes.

En pratique il est inutile de rechercher la totalité des modes propres : Le calcul des modes de fréquence élevée est généralement illusoire et de toutes façons un nombre réduit de modes est suffisant pour représenter correctement la réponse de la structure.

Sélection des modes propres : masses modales cumulées ou fréquence de coupure

Les divers règlements parasismiques modernes donnent des critères permettant de déterminer le nombre de modes à prendre en compte dans les calculs. Les plus courants sont les suivants :

- **critère des masses modales cumulées** : nous avons vu qu'un séisme de direction ϕ excitera chacun des modes j proportionnellement au facteur de participation $P_j(\phi)$. Il serait donc possible de classer les modes en fonction de leur $P_j(\phi)$ afin de déterminer ceux qui sont prépondérants. Il est en fait plus commode de raisonner sur les masses modales effectives $\mathcal{M}_j(\phi)$, qui représentent la part de la masse totale du bâtiment mobilisée dans chaque mode. En effet la somme des masses effectives pour une direction ϕ est égale à la masse totale : par conséquent, si la masse effective cumulée des modes pris en compte est suffisamment proche de la masse totale, nous serons sûrs de ne pas oublier un mode influent. En pratique, l'Eurocode 8-1 demandent de rechercher les n premiers modes correspondant à une masse modale effective cumulée d'au moins 90% de la masse totale pour les deux directions de calcul (article 4.3.3.3.1).
- **critère de la fréquence de coupure** : la « fréquence de coupure » est la fréquence (généralement 33 Hz) au-delà de laquelle les modes propres ne sont plus amplifiés par rapport aux mouvements sismiques du support. En d'autres termes, les masses vibrant selon ces modes sont soumises aux mêmes accélérations que le support, sans amplification dynamique. La recherche des modes propres peut donc être interrompue lorsque la période du dernier mode calculé est inférieure à 0.03 seconde.

Mode résiduel

Les règlements qui prévoient le critère de la fréquence de coupure recommandent généralement de tenir compte des modes négligés par un terme correctif correspondant à l'introduction d'un mode fictif dit « mode résiduel » (ou encore « pseudo-mode » ou « mode fictif ») : **le mode résiduel représente exactement la réponse cumulée des modes situés au-delà de la fréquence de coupure.**

En pratique, il est inutile de rechercher les pseudo-caractéristiques dynamiques (déformée modale, masses modales, etc.) du mode résiduel : on détermine en fait directement ses effets sur la structure, en terme de forces statiques équivalentes, en appliquant à la structure une accélération spectrale égale à l'accélération nominale de calcul.

Pour plus de précisions sur le mode résiduel, se reporter à « PRATIQUE DU MODE RÉSIDUEL DANS L'ANALYSE MODALE SPECTRALE » Richard SOULOUMIAC, Cahier technique n°3 de l'Association Française du Génie Parasismique.

Cas où la fréquence de coupure n'est pas atteinte

Au cas où la fréquence de coupure n'est pas atteinte (demande volontaire d'un pourcentage de masse modale cumulée trop faible ou d'un nombre de modes insuffisant), la notion de mode résiduel peut cependant être maintenue (c'est une approximation). Dans ce cas, le calcul du mode résiduel est conduit en appliquant à la structure l'accélération spectrale du dernier mode retenu.

Neutralisation de la fréquence de coupure

ÉPICENTRE vous permet de neutraliser le critère de fréquence de coupure. Dans ce cas, la notion de mode résiduel est également neutralisée : La prise en compte des modes négligés se fera alors par report des masses modales manquantes sur les modes retenus, au prorata de leur participation (pour plus de détail se reporter à

« PRISE EN COMPTE DES MODES NÉGLIGÉS DANS L'ANALYSE MODALE DES BÂTIMENTS SOUMIS AUX SÉISMES », Richard SOULOUMIAC et Michel HÉNIN, Second colloque national de Génie Parasismique, AFPS 1989).

2.7. Calcul sismique par la méthode de l'analyse modale spectrale

Principe

Nous avons vu que le mouvement vibratoire du bâtiment est la superposition des mouvements vibratoires découplés des 3n modes propres se comportant comme des oscillateurs simples indépendants. Nous pouvons donc étudier séparément l'action du séisme sur chaque mode, puis combiner l'ensemble : cette méthode générale est communément appelée « analyse modale spectrale ».

La méthode de calcul par « analyse modale spectrale » est recommandée par les règlements parasismiques modernes pour le calcul des bâtiments réguliers ou irréguliers soumis à des actions sismiques.

Étapes de l'analyse modale spectrale

Les étapes successives d'une analyse modale spectrale menée par ÉPICENTRE sont décrites ci-après :

- recherche des modes propres par la méthode de Vianello-Stodola : l'analyse modale est interrompue lorsque la fréquence de coupure est dépassée ou lorsque le critère de masse modale cumulée imposé par l'utilisateur est atteint (cf. 2.6)
- calcul des facteurs de direction modale de chacun des modes retenus (cf. 2.5)
- détermination des deux directions perpendiculaires de calcul (par défaut, les deux directions préférentielles de vibration par flexion)
- calcul des facteurs de participation des modes retenus, selon ces deux directions (cf. 2.2 et 2.3)
- calcul des coefficients sismiques de chaque mode à partir de la période du mode
- calcul des chargements statiques équivalents correspondant à chaque mode et à chaque direction de calcul
- calcul des chargements statiques équivalents du mode résiduel (cf. § 2.6) pour chaque direction de calcul
- calculs statiques successifs du bâtiment soumis à chacun de ces chargements (pour les deux directions de calcul)
- pour chacune des deux directions de calcul, combinaison quadratique complète des valeurs obtenues

Résultats de l'analyse modale spectrale

Pour chaque quantité calculée (déplacement, effort interne, contrainte, etc.) nous obtenons ainsi deux résultats — un pour chacune des deux directions de calcul — correspondant aux valeurs maximum probables de cette quantité pour le séisme considéré. Ces résultats obtenus pour chaque direction de calcul sont ensuite généralement combinés entre eux selon des règles propres au règlement parasismique utilisé (combinaison dite de Newmark pour l'Eurocode 8-1 : voir le paragraphe 12.11 de la présente notice).

Les valeurs trouvées sont positives (en fait sans signe) car issues de combinaisons quadratiques, mais elles doivent bien sûr être exploitées avec les deux signes puisque les mouvements du bâtiment sont alternés.

3. CALCUL SISMIQUE SELON L'EUROCODE 8-1

3.1. Méthode d'analyse mise en œuvre par Épicentre

Méthode de l'analyse modale spectrale

Épicentre utilise la méthode de l'**analyse modale spectrale**, préconisée par la clause 4.3.3.1(2)P de l'EC8-1 : « La méthode de référence pour déterminer les effets sismiques doit être l'analyse modale spectrale utilisant un modèle élastique linéaire de la structure et le spectre de calcul donné en 3.2.2.5. »

La méthode l'analyse modale spectrale est rapidement présentée par l'EC8-1 en 4.3.3.3 (« analyse modale utilisant les spectres de réponse »).

Ses grands principes sont résumés dans le chapitre précédent du présent document (§ 2.7). La méthode est présentée plus en détail dans le site Internet d'Épicentre, dans la section « théorie et pratique ».

Les caractéristiques massiques des étages sont calculées à partir de la description détaillée des planchers et des murs, avec excentrement du centre de gravité des étages, selon les directives de la clause 4.3.2 de l'EC8-1, pour tenir compte des torsion accidentelles d'axe vertical.

Sélection des modes propres retenus pour le calcul sismique

La sélection des modes propres est conforme à la clause 4.3.3.3.1(3) des règles. Par défaut, la recherche des modes propres est interrompue lorsque le cumul des masses modales selon OX et selon OY atteint 90% de la masse totale du bâtiment et que le cumul des inerties massiques modales atteint 90% de l'inertie massique totale du bâtiment.

On peut également imposer le nombre de modes propres calculés.

On peut aussi interrompre la recherche des modes lorsque la période de vibration devient inférieure à une fréquence de coupure (généralement 33 Hz). Dans ce cas, l'effet des modes négligés est pris en compte en considérant le mode résiduel associé (voir le site Internet d'Épicentre, section « théorie et pratique »)

Paramètres de l'analyse modale

Critère de sélection des modes propres

☒ pourcentage de masse modale cumulée au moins égal à %

☐ Au moins modes propres calculés

Fréquence de coupure

☐ Fréquence de coupure égale à Hz

☒ Pas de fréquence de coupure

Attention : la prise en compte d'une fréquence de coupure risque d'empêcher que les critères liés au pourcentage de masse modale cumulée ou au nombre minimum de modes propres soient respectés.

Annuler

OK

3.2. Paramètres du calcul sismique

Ils sont entrés par l'utilisateur dans la feuille de saisie ci-dessous :

Eurocode 8 : paramètres sismiques de calcul

Paramètres sismiques du projet

Spectres de calcul utilisés : Règles nationales (arrêté du 22/10/2010)

Catégorie d'importance : II EC8-1 (4.2.5)

Zone de sismicité : 3 EC8-1 (3.2.1)

Classe de sol : B EC8-1 (3.1.2)

Coefficient de comportement : 1.80 EC8-1 (5.2.2, 5.3.3)

Réduction d'agr en cas de travaux sur un bâtiment existant

En cas de travaux sur un bâtiment existant, l'article 3 de l'arrêté du 22 octobre 2010 applique un abattement de 40% sur l'accélération de référence agr déduite de la zone de sismicité.

☐ abattement de 40% sur l'accélération de référence agr (bâtiment existant)

Prise en compte de l'effort normal dynamique

☐ Prise en compte forfaitaire de l'effort normal dynamique ($\pm 50\%$ des charges gravitaires) pour la flexion composée (EC8-1, 5.4.2.5(3)P_i(4) et (5))

Choix des directions sismiques de calcul

☐ Imposées ☒ Calculées par le logiciel

Annuler OK

Paramètres sismiques du projet

Les paramètres sismiques permettent de déterminer l'action sismique (EC8-1, 3.2.2).

Dans le cas des bâtiments courants, nous admettons généralement que la structure résistante ne reste pas constamment dans le domaine élastique linéaire mais subit des incursions en domaine post-élastique.

Le coefficient de comportement de base de la structure sera dans ce cas supérieur à 1 et le spectre de calcul sera déterminé par les formules de la clause 3.2.2.5(4)P de l'EC8-1 :

$$0 \leq T \leq T_B : \quad S_d(T) = a_g \cdot S \cdot \left[\frac{2}{3} + \frac{T}{T_B} \cdot \left(\frac{2,5}{q} - \frac{2}{3} \right) \right] \quad \dots (3.13)$$

$$T_B \leq T \leq T_C : \quad S_d(T) = a_g \cdot S \cdot \frac{2,5}{q} \quad \dots (3.14)$$

$$T_C \leq T \leq T_D : \quad S_d(T) = \begin{cases} = a_g \cdot S \cdot \frac{2,5}{q} \cdot \left[\frac{T_C}{T} \right] \\ \geq \beta \cdot a_g \end{cases} \quad \dots (3.15)$$

$$T_D \leq T : \quad S_d(T) = \begin{cases} = a_g \cdot S \cdot \frac{2,5}{q} \cdot \left[\frac{T_C T_D}{T^2} \right] \\ \geq \beta \cdot a_g \end{cases} \quad \dots (3.16)$$

La valeur du coefficient de comportement q est à fixer par l'utilisateur, en liaison avec le bureau de contrôle éventuellement missionné sur le projet.

Prise en compte de la fissuration des murs

Pour l'analyse modale et le calcul sismique élastique du bâtiment, la fissuration du béton des sections des murs peut être prise en compte de deux manières (EC8-1, 4.3.1(6)) :

- Méthode simplifiée : abattement uniforme forfaitaire de 50% des caractéristiques mécaniques de toutes les sections de murs. (EC8-1, 4.3.1(7) et 9.4(3)).
- Méthode conseillée : application du coefficient d'abattement de 50% uniquement aux panneaux de murs dont la contrainte de traction en flexion composée, sous l'action sismique de calcul, peut excéder f_{ctm} pour le béton ou 0 pour la maçonnerie (calcul itératif).

La seconde méthode, évoquée par André Coin et Philippe Bisch dans leur livre « Conception des murs en béton selon les Eurocodes » (article 5.4.4c, en haut de la page 115), vous permet de majorer le coefficient de comportement de 20%, sous réserve de l'existence d'un plan de qualité prévoyant la vérification systématique de la bonne mise en place des armatures dans les zones critiques (Annexe nationale à l'EC8-1, clause 5.2.2.2(10)).

Prise en compte de la fissuration des murs en béton ou en maçonnerie

Pour l'analyse modale et le calcul sismique élastique du bâtiment, la fissuration du béton des sections des murs peut être prise en compte de deux manières (EC8-1, 4.3.1(6)) :

- Méthode simplifiée : abattement uniforme forfaitaire de 50% des caractéristiques mécaniques de toutes les sections de murs. (EC8-1, 4.3.1(7) et 9.4(3)).
- Méthode conseillée : application du coefficient d'abattement de 50% uniquement aux panneaux de murs dont la contrainte de traction en flexion composée, sous l'action sismique de calcul, peut excéder f_{ctm} pour le béton ou 0 pour la maçonnerie (calcul itératif).

La seconde méthode, évoquée par André Coin et Philippe Bisch dans leur livre « Conception des murs en béton selon les Eurocodes » (article 5.4.4c, en haut de la page 115), vous permet de majorer le coefficient de comportement de 20%, sous réserve de l'existence d'un plan de qualité prévoyant la vérification systématique de la bonne mise en place des armatures dans les zones critiques (Annexe nationale à l'EC8-1, clause 5.2.2.2(10)).

Les deux méthodes de prise en compte de la fissuration donneront des résultats similaires si les voiles du bâtiment sont très sollicités : ils seront totalement ou quasi-totalement fissurés dans les deux calculs.

Dans les autres cas, la seconde méthode a plusieurs effets favorables :

- les flèches horizontales seront plus faibles
- les voiles très sollicités seront fissurés : ils verront leur résistance diminuée et recevront de ce fait moins d'efforts, ce qui correspond à une redistribution implicite des efforts entre les voiles, avec pour conséquence des ferraillements mieux répartis et globalement plus faibles.
- elle permet de majorer le coefficient de comportement de 20%.

Non prise en compte de l'effort normal dynamique

La clause 5.4.2.5 de l'EC8-1 introduit la notion d'effort normal dynamique pour les murs en béton de grandes dimensions peu armés.

Épicentre ne procède pas aux vérifications liées à l'effort normal dynamique, que la Commission Nationale PS considère comme « pratiquement toujours sans effet » (réunion du 23 mars 2011).

Cette vérification pourra être ajoutée lors d'une mise à jour ultérieure du logiciel, si cela s'avère utile.

Choix des deux directions horizontales de calcul

Si vous n'imposez pas vous-même les deux directions horizontales de calcul (voir ci-dessus la feuille de saisie des paramètres sismiques du calcul), elles seront automatiquement déterminées par le logiciel, selon les directives de l'article 6.11 des PS 92 (« les composantes horizontales du mouvement de calcul doivent être orientées suivant les axes principaux de l'ouvrage »), plus précises sur ce point que l'EC8-1 :

- la direction ϕ_1 sera la direction de participation maximum du mode présentant la plus grande masse effective maximum.
- la direction ϕ_2 sera perpendiculaire à la direction ϕ_1 .

En effet, on peut généralement classer grossièrement les modes propres de vibration horizontaux d'un bâtiment en trois catégories, d'après « l'allure » de leur déformée : d'une part les modes de vibration à torsion prépondérante et d'autre part deux familles de modes de vibration à flexion prépondérante, orientées selon deux directions quasi-orthogonales.

Il est logique de choisir comme directions de calcul les deux directions correspondant aux deux directions préférentielles de vibration par flexion.

3.3. Hypothèses de calcul complémentaires

Type de murs : murs de grandes dimensions en béton peu armé

La clause 5.2.2.1 de l'EC8-1 (« Types de structure ») introduit la notion de système de murs de grandes dimensions en béton peu armé :

« Un système de murs doit être classé comme système de murs de grandes dimensions en béton peu armé si, dans la direction horizontale considérée, il comprend au moins deux murs dont la dimension horizontale n'est pas inférieure à 4,0 m ou $2h_w/3$, en prenant la valeur inférieure, qui portent collectivement au moins 20 % de la charge gravitaire totale dans la situation sismique de calcul, et s'il a une période fondamentale T_1 (la base étant supposée fixe vis-à-vis de la rotation) inférieure ou égale à 0,5 s. Il est suffisant qu'il n'y ait qu'un seul mur respectant les conditions ci-dessus dans une des deux directions, sous réserve que (a) la valeur de base du coefficient de comportement q_0 dans cette direction soit minoré d'un facteur de 1,5 sur la valeur donnée dans le Tableau 5.1 et (b) que deux murs au moins respectent les conditions ci-dessus dans la direction orthogonale. »

Ce type de murs correspond en pratique aux murs en béton banché peu ou pas armés construits habituellement en France : c'est le type de murs retenu par Épicentre dans ses traitements, tout particulièrement pour les calculs de ferrailage.

Non prise en compte de la composante sismique verticale

La clause 4.3.3.5.3 de l'EC8-1 précise les circonstances dans lesquelles la composante sismique verticale doit être prise en compte : ces circonstances ne recoupant pas celles rencontrées dans les bâtiments courants contreventés par des murs, Épicentre ne prend pas en compte la composante sismique verticale dans ses calculs effectués dans le cadre des Eurocodes.

Prise en compte des effets accidentels de torsion

Épicentre prend en compte les torsions accidentelles d'axe vertical en excentrant les centres de gravité des étages par rapport aux centres de torsion, selon les directives de la clause 4.3.2 de l'EC8-1 (clause 4.3.2)..

3.4. Calcul pratique

L'analyse modale puis le calcul sismique sont menés selon les principes détaillés dans le site Internet d'Épicentre (section « théorie et pratique »).

Les résultats correspondant à chacune des deux composantes sismiques horizontales sont combinés entre eux suivant les formules symboliques de la clause 4.3.3.5.1(3) historiquement proposées par Newmark (ces formules sont de ce fait communément appelées « combinaison de Newmark ») :

$$\begin{aligned} S &= S_x \quad \text{« + »} \quad 0.3 S_y \\ S &= 0.3 S_x \quad \text{« + »} \quad S_y \end{aligned}$$

S_x et S_y représentent un résultat calculé sous l'action de chacune des deux composantes horizontales et S le résultat global sous l'effet simultané des deux composantes. On retient la valeur la plus défavorable de S .

3.5. Contraintes de cisaillement dans les murs

Les contraintes de cisaillement (théoriques ou conventionnelles) sont calculées à partir de l'effort tranchant issu de l'analyse modale spectrale **multiplié par $(1 + q) / 2$** , par application de la clause 5.4.2.5(2) des règles.

Les efforts tranchants présentés dans les tableaux de résultats d'Épicentre relatifs aux efforts internes ne sont pas multipliés par ce coefficient.

3.6. Déplacements horizontaux

Les déplacements horizontaux déterminés à partir des chargements sismiques de calcul sont multipliés par le coefficient de comportement avant d'être écrits dans les tableaux.

3.7. Ferrailage des murs en béton selon l'EC2-1-1 et l'EC8-1

Épicentre procède au dimensionnement des ferrailage des murs en béton conformément aux dispositions et aux formules de calcul de l'EC2-1-1, en tenant compte des spécificités introduites par l'EC8-1 (clauses 5.4.2.5 et 5.4.3.5) : effort tranchant multiplié par $(1 + q) / 2$, pas d'armatures minimales d'effort tranchant.

Les méthodes utilisées par Épicentre pour dimensionner les 4 types de ferrailage des murs en béton sont exposées dans les chapitres 4 et 5 du présent document.

3.8. Vérification des murs en maçonnerie selon l'EC6-1-1 et l'EC8-1

Épicentre procède à la vérification des murs en maçonnerie conformément aux dispositions de l'EC6-1-1 et du nouveau DTU 20.1, en tenant compte des spécificités introduites par l'EC8-1.

Pour la vérification à la flexion composée, les algorithmes sont proches de ceux utilisés pour le ferrailage des murs en béton (méthode des 3 pivots avec des diagrammes parabole-rectangle pour les zones de maçonnerie comprimées).

Les mathodes utilisées par Épicentre pour vérifier les murs en maçonnerie sont exposées dans le chapitre 6 du présent document.

4. FERRAILLAGE DES MURS EN BÉTON APRÈS UN CALCUL STATIQUE

Ce chapitre expose en détail les modalités des divers calculs menés par Épicentre pour dimensionner les éléments de ferrailage des murs en béton en cas de **calcul statique** du bâtiment (calcul au vent).

Les mêmes principes seront réutilisés et complétés dans le chapitre suivant qui traite du ferrailage des murs en béton en cas de calcul sismique dynamique par analyse modale spectrale.

Les résultats des traitements présentés dans ce chapitre sont abondamment illustrés et commentés dans le chapitre 13 du Manuel de l'utilisateur (Modules graphiques de vérification des murs).

4.1. Introduction

Objectifs du module de ferrailage des murs en béton

Ce module a pour objet de donner des éléments chiffrés directement exploitables pour :

- vérifier le dimensionnement global d'un bâtiment lors de la phase d'avant-projet.
- préparer les plans de ferrailage en phase d'exécution

Attention : **les sections d'armatures et les contraintes de béton comprimé** calculées par Épicentre **sont à réinterpréter au voisinage des changements de section des murs**, par exemple à partir de raisonnements de type bielles/tirants. Cela concerne tout particulièrement le cas des **poutres-voiles**, qui ne sont pas traitées en tant que telles par Épicentre (pas de dimensionnement du ferrailage des parties suspendues en travée).

Le ferrailage des poutres-voiles est donc à réaliser entièrement par vous, sur la base des efforts de descente de charges et de contreventement fournis par Épicentre.

Conformité aux Eurocodes

Les dimensionnements sont réalisés en stricte conformité avec les dispositions de l'EC2-1-1 et de l'EC8-1.

En particulier, le calcul des armatures verticales de flexion composée et des contraintes de béton comprimé est mené selon les directives de l'EC2-1-1, avec application de la méthode des 3 pivots et détermination des déformations des sections à partir d'une loi de comportement du béton de type parabole-rectangle.

Conformément aux dispositions de l'EC2-1-1 et de l'EC8-1, la présent chapitre s'intéressera successivement aux quatre types de ferrailage suivants :

- armatures verticales de flexion composée
- armatures verticales liées aux effets du second ordre dans les zones de béton comprimé
- armatures horizontales d'effort tranchant
- armatures verticales de couture au droit des reprises de bétonnage

Caractéristiques des matériaux (paramètres de ferrailage)

Les calculs utilisent les caractéristiques des bétons et des aciers saisies dans le menu Description du projet :

- résistance caractéristique en compression (f_{ck}) des divers type de béton du projet
- limite caractéristique d'élasticité des aciers (f_{yk})
- pourcentage d'armatures maximum des potelets d'armatures verticales de flexion composée

Conformément à la clause 3.2.7(4) de l'EC2-1-1, le module d'élasticité longitudinal de l'acier E_s est pris égal à 2 000 000 MPa.

Murs à sections complexes, murs changeant de section, appuis entre murs

Pour des raisons de clarté, les modalités des calculs mis en œuvre par Épicentre pour dimensionner les éléments de ferrailage des murs seront d'abord présentées dans le cas simple de murs constitués d'un panneau plan unique (mais avec éventuellement des successions d'épaisseurs différentes), en dehors de tout contexte de changement de section.

Les cas des changements de section, des appuis entre murs et des sections complexes (sections composées de plusieurs branches de panneaux assemblés en lignes brisées) seront traités à la fin de ce chapitre.

4.2. Distinction entre murs non armés et murs armés

Définitions

L'EC2-1-1 consacre son chapitre 12 aux « structures en béton non armé ou faiblement armé » et y introduit des dispositions spécifiques qui dérogent aux dispositions de ferrailage des chapitres 6 à 9.

Pour clarifier les choses en ce qui concerne les murs, l'annexe nationale française de l'EC2-1-1 donne dans sa clause 5.11(2)P une définition précise des « murs non armés » et des « murs armés » :

« Les murs non armés sont ceux qui ne possèdent pas d'acier de traction sous sollicitation de flexion composée dans leur plan et qui respectent les conditions de la section 12 pour les limites des contraintes normales et de cisaillement. Les murs armés sont traités dans la section 6 et les sections 7 à 9. »

Pour que les choses soient encore plus claires, les Recommandations professionnelles françaises associées à l'EC2-1-1 le Guide d'application de l'EC2 (FD P18/717) de décembre 2013 consacre deux pages à préciser ces notions, dans sa propre clause 5.11(2)P.

En pratique et en résumé, une section de mur non armée est une section à laquelle les calculs de la section 12 de l'EC2-1-1 n'attribuent pas d'armatures de flexion composée, pas d'armatures liées aux effets du second ordre et pas d'armatures d'effort tranchant, pour les sollicitations qui lui sont appliquées.

Sinon, la section de mur doit être calculée comme étant « armée », selon les dispositions des chapitres 6 à 9 de l'EC8-1-1.

NB : il peut arriver qu'un mur ne respectant pas (de peu) les conditions de la section 12 et calculé de ce fait comme un mur armé ne se voit finalement attribuer aucune armature de flexion, d'effort tranchant et de zone comprimée, grâce à l'augmentation de la résistance du béton associée aux murs armés. En pratique, ce mur « armé » ne comportera donc aucune armature calculée mais seulement les armatures liées aux dispositions constructives (chaînages, armatures de peaux, etc.).

Déroulement des calculs par Épicentre

Épicentre calcule les murs du bâtiment en deux phases : dans un premier temps, il vérifie successivement tous les murs pour la flexion composée, les effets du second ordre et l'effort tranchant, en appliquant les formules des murs non armés. Pour chaque mur, il interrompt ces vérifications de type « mur non armé » si une des conditions requises pour les murs non armés n'est pas remplie.

Dans une deuxième étape, Épicentre recalcule selon les dispositions des murs armés tous les murs qui n'ont pas été retenus comme « non armés ».

Après ce traitement en deux phases, Épicentre applique les règles d'armatures minimales et vérifie le cisaillement le long des surfaces de reprise de bétonnage (aciers de couture).

4.3. Calcul des armatures verticales de flexion composée

Que cherche-t-on ?

Le bâtiment est soumis à un ensemble de chargements statiques extérieurs de vent concomitants à deux scénarios de descente de charges, maximum et minimum (voir plus bas).

Pour une section de mur donnée, à un niveau donné (niveau de plancher), nous recherchons :

- La section des éventuelles armatures verticales tendues de flexion composée permettant d'équilibrer chacune des configurations d'efforts internes résultant des charges appliquées au bâtiment. Ces armatures seront disposées dans la hauteur d'étage de mur située au-dessus du plancher.
- Les états de déformation et les diagrammes de béton comprimé correspondant à ces efforts internes.

Point de départ : utilisation des résultats du calcul statique élastique du bâtiment

Préalablement aux opérations de dimensionnement des ferrailages, Épicentre a recherché la répartition des efforts et la distribution des contraintes élastiques au sein du bâtiment, sous l'action des chargements statiques de vent qui lui sont appliqués. Comme préconisé par les règles, ce calcul est réalisé en utilisant pour la structure un modèle élastique et linéaire.

Les caractéristiques mécaniques des sections des murs en béton sont calculées à partir de leur coffrage, sans tenir compte des aciers mais en appliquant éventuellement les ajustements de calcul proposés par la commande « Options pour le calcul des caractéristiques des murs » du menu Description du projet (§ 5.11 du Manuel de l'utilisateur).

Sur ces bases, Épicentre calcule pour chaque cas de charge les torseurs d'efforts internes (M, N) dans les sections de murs, à chaque niveau de plancher, et les contraintes normales linéaires élastiques correspondantes.

Les mouvements du bâtiment étant alternés (balancement sous l'effet du vent), il faut aussi considérer chacun de ces torseurs avec les signes opposés à ceux directement issu du calcul.

Combinaison avec la descente de charges

Épicentre calcule également pour chaque mur et à chaque niveau de plancher, les torseurs d'efforts internes (M, N) dus à la descente de charges, dans le cadre des deux scénarios (combinaison maximum et combinaison minimum) prévus par les Eurocodes.

Lors du calcul de descente de charges du projet, ces torseurs sont calculés juste au-dessus et juste au-dessous des planchers.

Chargements élémentaires de dimensionnement de la section

Pour déterminer le ferrailage d'une section de mur donnée, à un niveau donné (z), Épicentre va considérer successivement tous les torseurs $\pm (M_i, N_i)$ correspondant aux chargements statiques extérieurs « pris avec les deux signes » et il va les combiner avec les torseurs (M, N) correspondant aux combinaisons de descente de charges maximum (DC_{max}) et minimum (DC_{min}), **ces torseurs (M, N) étant calculés juste au-dessus du plancher (z+)**.

NB : l'effet des charges apportées localement par le plancher sur le mur (appuis des dalles, des poutres porteuses, etc.) sera pris en compte un peu plus tard, dans le cadre de la vérification des zones comprimées.

Le dimensionnement du ferrailage se fera donc sur la base des combinaisons de sollicitations suivantes (écrites sous forme symbolique) :

- + (M_i, N_i) + (M, N) de DC_{max} en z+
- + (M_i, N_i) + (M, N) de DC_{min} en z+
- (M_i, N_i) + (M, N) de DC_{max} en z+
- (M_i, N_i) + (M, N) de DC_{min} en z+

Dans la suite de ce chapitre, ces sollicitations de calcul seront appelées « **chargements élémentaires de dimensionnement** » de la section.

Détermination des armatures par itérations à l'aide de la méthode des 3 pivots

Comme indiqué précédemment, nous nous plaçons pour le moment dans le cas simple d'une section rectiligne composée d'un seul panneau (mais avec éventuellement des successions d'épaisseurs différentes).

Les armatures verticales de flexion composée que nous cherchons seront évidemment placées à chaque extrémité de la section. Appelons-les A1 et A2. Si les sections d'acier A1 et A2 trouvées sont non nulles, elles seront organisées en potelets de dimensions a1 x L1 et a2 x L2 (a1 et a2 représentent les épaisseurs du mur à chacune de ses extrémités).

En pratique, Épicentre utilise une méthode itérative pour déterminer ces quatre inconnues : A1, A2, L1 et L2.

Dans chaque itération, Épicentre met en œuvre la méthode des 3 pivots, avec une loi de comportement de type parabole-rectangle, pour calculer les armatures de flexion tendues nécessaires pour équilibrer chacun des chargements élémentaires de dimensionnement qui ont été déterminés pour la section en cours.

Dans ces calculs, la contrainte normale du béton est limitée à $\phi \cdot f_{cd}$.

f_{cd} est la valeur de calcul de la résistance à la compression du béton ($f_{cd} = \alpha_{cc} f_{ck} / \gamma_c$, avec $\alpha_{cc} = 1$ pour un calcul de type « mur armé » et 0,8 pour un calcul de type « mur non armé »).

ϕ est un coefficient de réduction de la résistance à la compression du béton prenant en compte l'excentricité des charges et incluant les effets du second ordre ainsi que les effets normaux de fluage.

Nous verrons plus loin comment est calculé ϕ , selon des principes qui s'inspirent à la fois de la clause 12.6.5.2 de l'EC2-1-1 (murs non armés) et de la clause 5.11(2)P du Guide d'application de l'EC2 (FD P18/717) de décembre 2013 (murs armés ou non armés).

Ce coefficient ϕ global calculé par Épicentre n'est pas le coefficient ϕ de la formule 12.11 de l'EC2-1-1, mais il en découle.

Pour la première itération, les longueurs L1 et L2 des potelets d'armatures sont prises égales aux épaisseurs a1 et a2 des extrémités du mur (la section de ces potelets initiaux est donc a1 x a1 et a2 x a2).

À l'issue de cette première itération, on affecte à chaque extrémité les sections maximum A1 et A2 trouvées lors des calculs, auxquelles on associe une deuxième approximation des dimensions L1 et L2, déterminées de la façon suivante :

- L1 et L2 restent au moins égales aux épaisseurs a1 et a2 du mur

- les pourcentages d'armature $A1 / (a1 \times L1)$ et $A2 / (a2 \times L2)$ sont au plus égaux à la valeur limite σ_s imposée dans le menu Description du projet > Paramètres pour le ferrailage des murs en béton » (pourcentage d'armatures maximum des potelets incorporés, imposé par l'utilisateur : voir le § 5.23 du Manuel de l'utilisateur).

Dans les itérations suivantes, Épicentre recommence les calculs des armatures selon la méthode des 3 pivots, pour chaque chargement élémentaire de dimensionnement, en plaçant les centres de gravité des aciers au centre des potelets de longueur $L1$ et $L2$ déterminés lors de l'itération précédente et en prenant en compte, comme aciers comprimés, les éventuels aciers Ai de l'autre extrémité du mur issus de l'itération précédente.

$A1$, $A2$, $L1$ et $L2$ convergent en quelques itérations vers des valeurs retenues par Épicentre en fin de processus.

Notons que les valeurs de $A1$ et $A2$ trouvées en fin d'itération peuvent bien entendu être nulles, même si certains des chargements élémentaires de dimensionnement appliqués mettent la section partiellement en traction.

Dans le contexte de la méthode des 3 pivots, cette situation correspond à un diagramme parabole-rectangle de béton comprimé équilibrant à lui seul le torseur de calcul (M , N) appliqué à la section, sans nécessité d'armatures verticales de flexion.

4.4. Détermination des diagrammes de béton comprimé

Détermination des déformations de la section pour chaque chargement élémentaire de dimensionnement

Épicentre calcule ensuite l'état de déformation de la section correspondant à chaque chargement élémentaire de dimensionnement, en prenant en compte les valeurs $A1$, $A2$, $L1$ et $L2$ calculées précédemment

Arrêtons-nous un instant sur ce calcul pour bien comprendre ce qu'il signifie.

Supposons que, dans le calcul itératif décrit dans le paragraphe précédent, le potelet d'armatures ($A1$, $L1$) a été dimensionné à partir du chargement élémentaire de dimensionnement k : cela signifie que le potelet d'armatures ($A1$, $L1$) est nécessaire pour équilibrer le chargement dimensionnant k , mais qu'il est inutile ou surdimensionné pour tous les autres chargements élémentaires de dimensionnement de la section.

La déformation « réelle » de la section, équipée des potelets ($A1$, $L1$) et ($A2$, $L2$) et soumise à l'un des chargements élémentaires de dimensionnement non dimensionnant, ne sera donc pas la déformation obtenue par la méthode des 3 pivots appliquée à la section avec ce seul chargement. C'est cette déformée « réelle » qu'Épicentre va rechercher, pour chaque chargement élémentaire de calcul, en appliquant un traitement analogue à la méthode des 3 pivots, mais en considérant les aciers finalement retenus pour la section et non ceux qui suffiraient pour équilibrer le chargement considéré, en appliquant la méthode des 3 pivots sur ce seul chargement.

Calcul des diagrammes de béton comprimé correspondants

À partir de ces déformations et en appliquant la loi de déformation parabole-rectangle du béton, Épicentre détermine ensuite les diagrammes de béton comprimé associés à chacun des chargements élémentaires de dimensionnement de la section.

Présentation graphique des résultats

Ce sont ces diagrammes de béton comprimé qui sont affichés dans les deux premiers modules graphiques du menu Vérification des murs (flexion composée et béton comprimé), soit sous forme de diagramme enveloppe, soit sous forme complète (les diagrammes de tous les chargements élémentaires de dimensionnement sont dessinés).

Lorsqu'ils existent, les potelets d'armatures de flexion composée de chaque section de mur sont dessinés en complément, à chaque niveau, mais uniquement dans le premier module graphique du menu Vérification des murs (flexion composée). Pour plus de détails, voir le chapitre 11 (Le menu Vérification des murs).

4.5. Association des calculs de flexion composée et de vérification des zones comprimées

Présentation des algorithmes utilisés

Épicentre a une très bonne connaissance géométrique et logique du bâtiment en cours de calcul et donc de l'environnement de la section de mur étudiée : Épicentre connaît précisément la hauteur libre du mur pour

l'étage en cours et l'étage inférieur (épaisseurs de planchers déduites), il connaît la nature des planchers adjacents à ce mur, aux niveaux $n-1$, n et $n+1$, ainsi que la qualité de leur encastrement sur le mur (zéro, un ou deux planchers adjacents). Il peut détecter la présence de murs raidisseurs et calculer les éventuels décalages en plan des axes des murs superposés et donc l'excentricité associée. Il connaît la répartition des efforts de descente de charges ainsi que les réactions d'appui au niveau des appuis de planchers, de poutres et de murs. Enfin, il peut calculer de manière précise l'effet des chargements élémentaires de dimensionnement sur la section (méthode des 3 pivots avec diagrammes parabole-rectangle) et donc les diagrammes de déformation associés, notamment les diagrammes de béton comprimé (longueur et effort normaux des zones comprimées).

En s'appuyant sur cette très bonne connaissance de l'environnement de la section de mur étudiée, Épicentre met en œuvre une série d'algorithmes sophistiqués qui associent étroitement les calculs de flexion composée et la vérification des zones de béton comprimé, de façon à optimiser les dimensionnements obtenus.

Les étapes de ce traitement sont résumées ci-après (certaines d'entre elles seront détaillées plus loin) :

Séquence 1 : tentative de dimensionnement en mur non armé (chapitre 12 de l'EC2-1-1)

- a) La section est d'abord calculée en flexion composée, comme exposé précédemment, avec $\phi = 1$ (ϕ est le coefficient de réduction de la résistance du béton présenté à la page précédente).
- b) Si la section nécessite des armatures tendues, elle n'est plus du type mur non armé -> on saute directement à la séquence 2 ci-après (mur armé).
- c) Sinon, les zones comprimées associées à chaque chargement élémentaire sont vérifiées par bandes, au-dessus et au-dessous du plancher. Nous décrirons cette étape en détail un peu plus loin. Précisons cependant dès maintenant que le calcul des efforts résistants des bandes fera bien entendu intervenir la formule 12.11 de l'EC2-1-1 : $\phi = 1,07 (1 - 2\epsilon_{tot}/h_w) - 0,026 l_0/h_w \leq (1 - 2\epsilon_{tot}/h_w)$. Mais les valeurs de ϕ ainsi calculées seront des valeurs locales, calculées tous les 10 cm à l'intérieur des bandes, et sont donc différents du coefficient ϕ introduit précédemment et qui est le coefficient de réduction appliqué globalement à la section en cours de traitement.
- d) Si la section ne rencontre pas de problèmes de flambement, le calcul est terminé et on passe à une autre section de mur, en enregistrant la valeur $\phi = 1$ utilisée pour cette section de mur.
- e) Si la section rencontre des problèmes de flambement, cela signifie que pour certaines bandes de calcul on a obtenu $N_{Ed} > N_{Rd}$ (effort normal de calcul de la bande > effort résistant). Dans ce cas, on donne à ϕ la valeur mini des N_{Rd}/N_{Ed} obtenus pour l'ensemble des bandes et on reprend le calcul en a, avec cette nouvelle valeur de $\phi < 1$.
- d) Après quelques itérations sur les séquences a-e, on peut déboucher sur deux issues :
 - On sort en d car on a trouvé une valeur de ϕ qui supprime les problèmes de flambement tout en permettant un dimensionnement de flexion composée conforme à la section 12 : le calcul est terminé et on passe à une autre section de mur, en enregistrant la valeur de ϕ utilisée pour cette section de mur.
 - La contrainte normale maximum du béton (égale à $\phi \cdot f_{cd}$) est devenue insuffisante pour justifier la section en flexion composée. Comme le calcul en contexte « mur non armé » ne permet pas de prévoir des armatures verticales de renfort pour régler les problèmes de flambement, on saute à la séquence 2 ci-après (mur armé)

Séquence 2 : tentative de dimensionnement en mur armé (chapitres 6 à 9 de l'EC2-1-1)

Les étapes sont les mêmes que pour la séquence précédente (mur non armé), avec cependant deux ajustements :

- Dans l'étape c, la formule permettant de calculer les ϕ locaux est adaptée au contexte « mur armé » (cette adaptation sera explicitée plus loin).
- La seconde issue de l'étape d sera traitée différemment : si la valeur de ϕ en cours ne permet plus de justifier la section en flexion composée, Épicentre cherchera une valeur de ϕ un peu supérieure qui permettra de rétablir le calcul en flexion composée puis il calculera les armatures verticales de renfort nécessaires pour justifier la section vis-à-vis des effets du second ordre dans les zones de béton comprimé (le calcul des armatures de renfort est détaillé plus loin).

Bilan et avantages du dispositif mis en œuvre

Le dispositif mis en œuvre par Épicentre permet de combiner la justification de la flexion composée et la vérification des zones de béton comprimée en recherchant un coefficient ϕ global de réduction de la résistance à la compression du béton, calculé au plus juste, qui permet d'optimiser les dimensionnements obtenus :

- Très souvent, l'intervention de ce coefficient ϕ global permet de justifier les sections à la flexion composée et au flambement des zones comprimées sans recourir à des armatures verticales de renfort vis-à-vis du flambement des zones comprimées, le surcroît d'armatures de flexion induit (diminution de la contrainte du

béton → diminution du bras de levier des aciers de flexion → augmentation de la section d'acier) étant largement compensé par la suppression de ces armatures de renfort.

- Lorsque les armatures de verticales de renfort vis-à-vis du flambement des zones comprimées sont nécessaires, elles sont calculées au plus juste grâce à l'effet du coefficient ϕ global qui permet généralement une atténuation significative des problèmes de flambement rencontrés.

4.6. Vérification des zones de béton comprimé

Principes du calcul

Comme indiqué dans le paragraphe précédent, Épicentre utilise sa bonne connaissance de l'environnement de la sections de murs en cours de traitement pour procéder à la vérification des zones de béton comprimé de chaque chargement élémentaire de dimensionnement de la section, **au-dessus et au-dessous du plancher**.

Le calcul est mené indépendamment pour chaque chargement élémentaire de dimensionnement appliqué à la section de mur considérée, selon les dispositions des clauses 5.8.3.2(7) et 12.6.5 de l'EC2-1-1, complétées par les précisions apportées par la clause 5.11(2)P du Guide d'application de l'EC2 (FD P18/717) de décembre 2013.

En pratique, Épicentre procède à deux vérifications distinctes :

- **au-dessus du plancher** : la zone de béton comprimée correspondant à chaque chargement élémentaire de dimensionnement est découpée en bandes fictives adjacentes pour lesquelles on calcule NEd (effort normal appliqué à la bande, cad la résultante des contraintes de la zone comprimée) et NRd (effort résistant de la bande, calculé à partir des caractéristiques du mur au-dessus du plancher). On vérifie alors si $N_{Ed} < N_{Rd}$.
- **au-dessous du plancher** : la vérification est faite selon les mêmes principes, mais avec les différences suivantes : (1) pour les efforts de descente de charges, NEd comporte en plus les charges apportées *localement* par le plancher et par les éventuels appuis de poutres et de murs ou poteaux portés et (2) NRd doit être recalculé à partir des caractéristiques du mur au-dessous du plancher.

Les modalités du calcul sont analogues que l'on soit en contexte mur armé ou mur non armé.

Détermination des bandes de calcul

La largeur des bandes de vérification associées à chaque chargement élémentaire de dimensionnement est déterminée conformément aux recommandations du point 2 de la clause 5.11(2)P du Guide d'application (« on admet le plus souvent de limiter la largeur des bandes à la plus petite des deux valeurs : la moitié de la hauteur d'étage et les 2/3 de la longueur de la zone comprimée »).

NB : la largeur des bandes peut donc être différente au-dessus et au-dessous du plancher.

Épicentre prévoit de plus que la première bande (celle située du côté de l'extrémité la plus comprimée) doit avoir une largeur au moins égale à $\min(50 \text{ cm}, \frac{1}{2} \text{ longueur du mur})$. Cette disposition permet de rejeter une première bande trop étroite due à une zone comprimée très courte mais à contrainte élevée : considérer le flambement localisé d'une bande de 20 ou 30 cm de largeur n'a pas beaucoup de signification physique.

Calcul de l'effort normal appliqué à la bande de calcul

Épicentre calcule la résultante des contraintes normales de la zone comprimée du chargement élémentaire considéré sur l'emprise de la bande (intégration d'un tronçon du diagramme parabole-rectangle de la zone comprimée).

Pour la vérification au-dessous du plancher, il ajoute les charges apportées *localement* par le plancher et par les éventuels appuis de poutres et de murs ou de poteaux portés (Épicentre connaît ces charges, qu'il a calculées selon un pas de 10 cm lors du calcul de la descente de charges du bâtiment).

Calcul de l'effort normal résistant de la bande de calcul

Pour calculer l'effort normal résistant de la bande, Épicentre va calculer successivement l'effort normal résistant élémentaire de chaque tronçon de mur de 10 cm contenu dans la bande (il reprend la segmentation des murs selon un pas de 10 cm appliquée pour le calcul de descente de charges). L'effort normal résultant NRd de la bande sera le cumul de ces efforts résistants élémentaires.

En effet, le contexte de calcul peut varier le long du mur vérifié : épaisseur du mur, présence ou pas de planchers, position des murs raidisseurs éventuels, etc.

Le calcul selon un pas de 10 cm permet de tenir compte de manière très précise de ces variations locales du contexte de calcul.

En pratique, Épicentre procède aux traitements suivants pour chaque tronçon de mur de 10 cm contenu dans la bande, au-dessus puis au-dessous du plancher :

- détermination de la hauteur efficace du mur : Épicentre recherche les planchers hauts et bas en béton (les planchers en hourdis ou en dalles alvéolées précontraintes **ne seront pas considérés** comme des planchers en béton) situés de chaque côté du mur, afin de déterminer le degré d'encastrement en tête et en pied (utilisation du tableau 4 du Guide d'application de l'EC2 (FD P18/717) de décembre 2013 plus précis que la clause 12.6.4(4) de l'EC2-1-1).
- prise en compte des murs raidisseurs éventuels : Épicentre détecte les raidisseurs éventuels (éléments de murs en retour) affectant le mur considéré, au-dessus ou au-dessous du plancher, et applique les formules du tableau 12.1 de l'EC2-1-1).

NB : dans la version 18, Épicentre ne prend en compte que les raidisseurs faisant partie du même mur que le panneau de mur considéré (murs à sections complexes à branches multiples du type L, U, E, etc.). Si, dans la modélisation, ces murs à sections complexes sont éclatés en panneaux séparés, ces panneaux ne joueront plus le rôle de raidisseurs pour les panneaux adjacents.

- Calcul de l'excentrement de premier ordre : $1/400$ de la hauteur efficace du mur + décalage éventuel des axes des murs superposés.
- En contexte mur non armé, l'effort résistant de chaque tronçon de 10 cm est calculé à partir de ces éléments, selon la formule 12.10 de la clause 12.6.5.2 avec ϕ calculé selon la formule 12.11 modifiée par l'Annexe nationale NF EN 1992-1-1/NA:03-2016 (2ème tirage) :

$$\phi = 1,07 (1 - 2e_{\text{tot}}/h_w) - 0,026 l_0/h_w \leq (1 - 2 e_{\text{tot}}/h_w)$$

NB : l'EC2-1-1 donnait comme formule initiale : $\phi = 1,14 (1 - 2e_{\text{tot}}/h_w) - 0,02 l_0/h_w \leq (1 - 2 e_{\text{tot}}/h_w)$

- En contexte mur armé, l'effort résistant de chaque tronçon de 10 cm est calculé selon la même formule mais avec une valeur de ϕ différente : $\phi = 1,14 (1 - 2e_{\text{tot}}/h_w) - 0,026 l_0/h_w \leq (1 - 2 e_{\text{tot}}/h_w)$

En ce qui concerne le dernier point, au paragraphe 4.2.5 de leur livre Conception des murs selon les Eurocodes, MM. Bisch et Coin écrivent à propos de cette formule, écrite avec les coefficients 1,14 et 0.026 : « Cette formule, établie et validée à partir de la méthode générale de la section 5.8, peut donc être utilisée aussi bien dans le cas des murs armés (section 6) que dans celui des murs non armés (section 12), bien qu'obtenue par transformation de la formule figurant dans la section 12.

Vérification au flambement de la bande de calcul et détermination éventuelle du nouveau coefficient de réduction ϕ de la section de mur

La bande de calcul est considérée comme stable au flambement si $N_{Ed} < N_{Rd}$ (à vérifier au-dessus et au-dessous du plancher).

Comme indiqué précédemment dans le § 4.5, la vérification au flambement du mur considéré s'inscrit dans un traitement itératif associant la vérification de flexion composée et faisant intervenir le coefficient ϕ , coefficient de réduction de la résistance à la compression du béton de la section de mur.

Ce traitement itératif est poursuivi tant que la section présente des problèmes de flambement tout en restant justifiée en flexion composée. La valeur de ϕ est recalculée à chaque itération comme étant la valeur mini des N_{Rd}/N_{Ed} obtenus pour l'ensemble des bandes vérifiées lors de l'itération (le traitement itératif est décrit en détail dans le § 4.5).

Le cas échéant, calcul des armatures de renfort nécessaires

Le traitement itératif décrit par le § 4.5 peut se terminer avec une valeur de ϕ qui permet encore tout juste de justifier la section en flexion composée mais ne supprime pas les problèmes de flambement, soit au-dessus du plancher, soit au-dessous du plancher soit à la fois au-dessus et au-dessous du plancher.

Il est dans ce cas nécessaire de prévoir des armatures verticales de renfort pour justifier la section de mur vis-à-vis des problèmes de flambement. Selon les cas, ces armatures seront à prévoir au-dessus du plancher et/ou au-dessous du plancher.

Pour calculer la section des aciers verticaux de renfort, Épicentre s'appuie sur la note de la clause 9.6.2(1) de l'AN NF EN 1992-1-1/NA de mars 2016 : *NOTE : Le calcul de la force normale ultime résistante d'un voile considéré comme armé, donc comportant le pourcentage minimal de 0,2 %, peut être effectué en prenant en compte les armatures longitudinales prévues et à partir de la contrainte caractéristique du béton f_{cd} .*

Cette note indique que la part d'effort normal appliqué non reprise par l'effort résistant de la section de béton d'une bande peut être apportée par la section des aciers de renfort contribuant au calcul comme un complément de section de béton, proportionnellement à sa limite caractéristique f_{yd} .

Considérons le chargement élémentaire de dimensionnement n et sa bande i sujette au flambement.

Cela signifie que, pour cette bande, le calcul a donné $N_{Edni} > N_{Rdni}$

Introduisons ϕ_{ni} tel que $NR_{dni} = \phi_{ni} \times (Ac_{ni} \times f_{cd})$, Ac_{ni} étant la surface du béton de la bande i .

On a donc $\phi_{ni} = NR_{dni} / (Ac_{ni} \times f_{cd})$,

ϕ_{ni} est le facteur global de réduction de la résistance à la compression de la bande i , résultat de l'action de tous les ϕ_{ni} locaux calculés par Épicentre avec un pas de 10 cm le long de la bande.

Si nous ajoutons le long de la bande des aciers de renfort de section totale As , NR_{dni} prend une nouvelle valeur $NR_{d'ni} = \phi_{ni} \times (Ac_{ni} \times f_{cd} + As \times f_{yd})$, f_{yd} étant la limite d'élasticité de calcul de l'acier de béton armé.

Pour que la bande ne soit plus sujette au flambement, il faut prévoir une section d'acier As_{ni} telle que :

$$NR_{d'ni} = NE_{dni} = \phi_{ni} \times (Ac_{ni} \times f_{cd} + As_{ni} \times f_{yd})$$

En remplaçant ϕ_{ni} par son expression ci-dessus, il vient : $NE_{dni} = NR_{dni} / (Ac_{ni} \times f_{cd}) \times (Ac_{ni} \times f_{cd} + As_{ni} \times f_{yd})$

Ou encore : $NE_{dni} = NR_{dni} + NR_{dni} \times (As_{ni} \times f_{yd}) / (Ac_{ni} \times f_{cd})$

On en déduit la valeur de $As_{ni} = (NE_{dni} - NR_{dni}) / (NR_{dni} \times f_{yd})$

La section répartie de ces aciers le long de la bande (cm²/ml) sera donc $As_{ni} / (\text{longueur de la bande } i)$.

Pourcentage mini et maxi des aciers verticaux de renfort

Épicentre applique les disposition de la clause 9.6.2 de l'EC2-1-1 et de ses annexes nationales (*) :

- $As_{vmin} = 0,002 A_c$ (si des armatures de renfort sont nécessaires dans la bande considérée)
- $As_{vmax} = 0,04 A_c$

(*) L'annexe nationale de mars 2007 prévoyait $As_{vmin} = 0,001 A_c (1 + 2 (NE_d - NR_{d,12}) / (NR_{d,6} - NR_{d,12}))$, mais l'annexe nationale de mars 2016 a rétabli la valeur du tirage initial de l'EC2-1-1 ($As_{vmin} = 0,002 A_c$).

Présentation graphique des sections d'armatures trouvées

À l'issue de ces calculs effectués pour chacun des chargements élémentaires de dimensionnement de la section, Épicentre recherche dans chaque tronçon de 10 cm la valeur maximum de section d'acier trouvée : ces sections d'acier réparties, ainsi calculées tous les 10 cm et exprimées en cm²/ml, donnent le diagramme brut de calcul des armatures nécessaires à la résistance du béton comprimé (Épicentre présente ces diagrammes bruts de calcul en violet clair dans le module d'affichage dédié à la vérification du béton comprimé)

Dans un deuxième temps, Épicentre lisse ces valeurs par bandes de 1 ml pour synthétiser les résultats et les rendre plus facilement lisibles et exploitables : les diagrammes correspondants sont présentés à l'écran en violet foncé, en compagnie des précédents.

NB : Épicentre détermine ces bandes de lissages de 1 ml de longueur à partir de chacune des deux extrémités de la section, la bande résiduelle située en milieu de section pouvant de ce fait avoir une longueur comprise entre 0 et 2 ml.

4.7. Armatures horizontales d'effort tranchant

Calcul des armatures éventuelles pour chaque chargement élémentaire

Comme dans les calculs précédents, Épicentre considère successivement chacun des chargements élémentaires de dimensionnement associés à la section en cours. La vérification au cisaillement de la section est réalisée pour chaque chargement selon les dispositions des clauses 12.6.3 (murs non armés) ou 6.2.2 et 6.2.3 (murs armés) de l'EC2-1-1 et ne pose pas de problèmes particuliers :

- les valeurs de M , N et T ont déjà été calculées pour la vérification de flexion
- les sections des éventuelles armatures de flexion composée tendues ou comprimées sont connues (section A_1 ou A_2 calculée précédemment) ainsi que la longueur et l'effort normal de la zone comprimée associée à chaque chargement élémentaire.
- en cas de mur non armé, si $\tau_{cp} \leq f_{c,90}$ (clause 12.6.3 de l'EC2-1-1), il n'est pas nécessaire de prévoir des armatures horizontales d'effort tranchant.
- en cas de mur armé, si l'effort tranchant T est inférieur à l'effort tranchant résistant calculé selon les formules 6.2A et 6.2b de l'EC2-1-1, il n'est pas nécessaire de prévoir des armatures horizontales d'effort tranchant.
- dans le cas contraire, les formules 6.8 et 6.9 de l'EC2-1-1 permettent de calculer les éventuelles armatures horizontales d'effort tranchant associées au chargement considéré.

Armatures minimales d'effort tranchant

Elles sont calculées selon les formules 9.4 et 9.5(N) de la clause 9.2.2.

Bilan des sections d'armatures trouvées

On conserve les armatures horizontales maximum trouvées lors de ces calculs : ce sont ces sections d'armatures qui sont affichées à l'écran par Épicentre.

4.8. Armatures verticales de couture au droit des reprises de bétonnage

Vérification des surfaces de reprise pour chaque chargement élémentaire

La vérification de cisaillement le long des surfaces de reprise de bétonnage de la section, opérée pour chaque chargement élémentaire de dimensionnement, ne pose pas de problèmes particuliers :

- application des formules de la clause 6.2.4 de l'EC2-1-1 (on utilise les caractéristiques du diagramme du béton comprimé de chaque chargement élémentaire, déterminé précédemment lors des vérifications de flexion : longueur de la zone comprimée, effort normal de compression du béton et sections des éventuelles armatures de flexion)
- calcul des éventuelles armatures verticales nécessaires

NB : conformément aux dispositions de la clause 6.2.5(1) de l'EC2-1-1, qui prévoit de prendre en compte l'« aire de la surface des armatures traversant l'interface, armatures d'effort tranchant comprises, le cas échéant, correctement ancrées de part et d'autre de l'interface », ce calcul tient compte des éventuelles armatures verticales de flexion composée tendues et comprimées du chargement élémentaire considéré.

Bilan des sections d'armatures trouvées

On conserve les armatures verticales maximum trouvées.

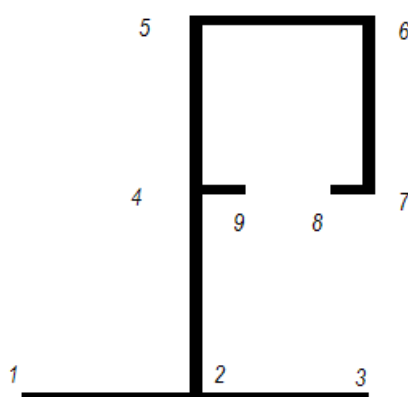
4.9. Sections complexes, introduction des plans de contreventement

Raisonnement par plans de contreventement

Une section complexe est composée d'une ou plusieurs branches de segments assemblés en ligne brisée.

Pour dimensionner les éléments de ferrailage de telles sections, Épicentre les dissocie en « plans de contreventement » : un plan de contreventement est un ensemble de segments successifs de la section assemblés de manière rectiligne (ou quasi-rectiligne : Épicentre admet les défauts d'alignement inférieurs à 5 degrés) et fonctionnant ensemble en flexion composée lorsque le mur est soumis à des actions horizontales.

La section ci-dessous comporte 6 plans de contreventements : 1-3, 2-5, 5-6, 6-7, 4-9, 7-8



Lors du calcul élastique d'ensemble du bâtiment (calcul statique au vent ou calcul sismique dynamique), Épicentre calcule pour chaque section complexe les efforts internes globaux qui leur sont appliqués, puis les diagrammes de contraintes élastiques correspondants (contraintes normales et cisaillement : ces diagrammes de contraintes élastiques sont affichés par le menu Calcul statique / Calcul sismique).

Lors des calculs de ferrailage, Épicentre va considérer chaque plan de contreventement isolément, en le traitant comme une section simple rectiligne : à partir des diagrammes de contraintes normales élastiques et de cisaillement élastique calculés pour chaque chargement statique de vent ou de séisme appliqué au bâtiment, Épicentre peut calculer les efforts internes M, N et T appliqué à chaque plan de contreventement de la section.

Épicentre peut donc déterminer pour chaque plan de contreventement, considéré isolément, des chargements élémentaires de dimensionnement analogues à ceux introduits précédemment pour les sections composées d'un panneau unique (avec éventuellement des successions d'épaisseurs différentes).

Les méthodes de calcul décrites dans les paragraphes ci-dessus pour les sections rectilignes peuvent alors s'appliquer sans difficultés à chaque plan de contreventement et permettent ainsi de déterminer les éléments de ferrailage de la section complète.

Lorsque deux plans de contreventement sont connectés entre eux par une de leurs extrémités (par exemple, les plans de contreventement 2-5 et 5-6 de la section de mur ci-dessus), **il vous faudra bien entendu cumuler les sections d'acier de flexion composée calculées au droit de cette extrémité.**

NB : dans le module d'affichage des éléments de ferrailage, les plans de contreventement sont mis en évidence (jaune vif) quand on place le pointeur de la souris dessus. Par un clic droit, vous pouvez alors afficher les torseurs de calcul pris en compte par Épicentre pour dimensionner le plan de contreventement sélectionné.

4.10. Changements de section, appuis entre murs, poutres-voiles

Les explications ci-dessus se situaient dans le cas simple d'une section constituée d'un panneau unique (avec éventuellement une succession d'épaisseurs différentes), en dehors de tout contexte de changement de section. Voyons d'abord comment les méthodes utilisées peuvent être adaptées en cas de changement de section.

Changements de section, appuis entre murs

En cas de changement de section, Épicentre sait calculer les efforts au droit des sections interfaces des murs et des sections d'appui entre murs voisins superposés.

Les calculs présentés précédemment peuvent encore s'appliquer dans un contexte de changement de section : Les opérations de dimensionnement des armatures longitudinales, de calcul des zones de béton comprimé, de détermination des déformations de la section et de vérification de la résistance du béton comprimé sont menées par Épicentre au droit des sections interfaces ou d'appui, comme explicité dans les paragraphes ci-dessus, avec des chargements élémentaires de dimensionnement calculés à partir des efforts internes correspondant à ces sections de transition.

Il vous appartiendra de déterminer les dispositions de ferrailage dans la hauteur d'étage au-dessus et au-dessous de la section, à partir des sections d'acier calculées par Épicentre à chaque niveau de plancher, en construisant par exemple des raisonnements de type bielles/tirants et en assurant la circulation des efforts et la continuité des ferrillages.

Les ferrillages proposés par Épicentre doivent donc dans ce cas être considérés comme des points de départ et être complétés par des dispositions complémentaires pour accompagner la formation des bielles et pour assurer l'ancrage ou la continuité des armatures, de part et d'autre du plancher.

Murs fonctionnant en poutres-voiles (poutres-cloisons)

Épicentre ne traite pas la partie suspendue des poutres-voiles. Il se contente de calculer les efforts dans les appuis situés de part et d'autre des parties suspendues.

Il vous appartiendra donc de déterminer vous-même le ferrailage des poutres-voiles, qui ne sont pas traitées en tant que telles par Épicentre, en raisonnant à partir des efforts donnés par Épicentre,.

Il vous faudra aussi penser à ferriller les parties de mur en encorbellement, travaillant en console.

Armatures d'effort tranchant et armatures de couture

Contrairement aux calculs précédents qui sont menés par Épicentre au droit des sections interfaces, les vérifications de cisaillement et de couture doivent être effectuées dans la hauteur d'étage au-dessus des changements de section, **sur la base des efforts et des sections considérés sur cette hauteur d'étage, les murs étant pris en compte avec leur section dans la hauteur de l'étage.**

Ceci signifie qu'en plus des chargements élémentaires de dimensionnement calculés par Épicentre au droit des sections interfaces, **une seconde série de chargements élémentaires de dimensionnement doit être calculée par Épicentre à partir des efforts internes calculés juste au-dessus des sections interfaces** ou d'appui (au pied de la hauteur d'étage considérée, mais avec les sections de la hauteur de l'étage).

Épicentre effectue sur ces bases un pré-calcul de type « armatures verticales de flexion composée et diagrammes de béton comprimé », dont les résultats ne seront pas affichés mais serviront uniquement à effectuer les vérifications d'effort tranchant et de couture dans la hauteur d'étage, selon les principes vus précédemment pour une section simple.

5. FERRAILLAGE DES MURS EN BÉTON APRÈS UN CALCUL SISMIQUE DYNAMIQUE

Le chapitre précédent a présenté en détail les méthodes de calcul mises en œuvre par Épicentre pour dimensionner les éléments de ferrailage des murs en béton après un calcul statique au vent du bâtiment.

Ce chapitre montre comment Épicentre réutilise exactement les mêmes principes de calcul dans le cas d'un calcul sismique dynamique (calcul par analyse modale spectrale).

Les résultats des traitements présentés dans ce chapitre sont abondamment illustrés et commentés dans le chapitre 13 du Manuel de l'utilisateur (Modules graphiques de vérification des murs).

5.1. Introduction

Objectifs du module de ferrailage des murs en béton

Ce module a pour objet de donner des éléments chiffrés directement exploitables pour :

- vérifier le dimensionnement global d'un bâtiment lors de la phase d'avant-projet.
- préparer les plans de ferrailage en phase d'exécution

Attention : **les sections d'armatures et les contraintes de béton comprimé** calculées par Épicentre **sont à réinterpréter au voisinage des changements de section des murs**, par exemple à partir de raisonnements de type bielles/tirants. Cela concerne tout particulièrement le cas des **poutres-voiles**, qui ne sont pas traitées en tant que telles par Épicentre (pas de dimensionnement du ferrailage des parties suspendues en travée).

Le ferrailage des poutres-voiles est donc à réaliser entièrement par vous, sur la base des efforts de descente de charges et de contreventement fournis par Épicentre.

Conformité aux Eurocodes

Les calculs sont réalisés en stricte conformité avec les dispositions de l'EC2-1-1 et de l'EC8-1.

En particulier, le calcul des armatures verticales de flexion composée et des contraintes de béton comprimé est mené selon les directives de l'EC2-1-1, avec application de la méthode des 3 pivots et détermination des déformations des sections à partir d'une loi de comportement du béton de type parabole-rectangle.

Conformément aux dispositions de l'EC2-1-1 et de l'EC8-1, le présent chapitre s'intéressera successivement aux quatre types de ferrailage suivants :

- armatures verticales de flexion composée
- armatures verticales liées aux effets du second ordre dans les zones de béton comprimé
- armatures horizontales d'effort tranchant
- armatures verticales de couture au droit des reprises de bétonnage

Caractéristiques des matériaux (paramètres de ferrailage)

Les calculs utilisent les caractéristiques des bétons et des aciers saisies dans le menu Description du projet :

- résistance caractéristique en compression (f_{ck}) des divers types de béton du projet
- limite caractéristique d'élasticité des aciers (f_{yk})
- pourcentage d'armatures maximum des potelets d'armatures verticales de flexion composée

Conformément à la clause 3.2.7(4) de l'EC2-1-1, le module d'élasticité longitudinal de l'acier E_s est pris égal à 2 000 000 MPa.

Similitudes avec le ferrailage des murs en béton en cas de calcul statique

Les principes de calcul sont exactement les mêmes et seront donc réutilisés dans ce chapitre sans faire l'objet d'une présentation aussi détaillée que dans le chapitre précédent.

Il vous est donc fortement conseillé de lire le chapitre précédent avec attention avant d'entamer la lecture de ce chapitre.

5.2. Armatures verticales de flexion composée

Que cherche-t-on ?

Le bâtiment est soumis à des actions sismiques d'ensemble qui viennent se superposer aux effets de la descente de charges générale pris en compte avec la combinaison d'actions prévue par les Eurocodes (EC0, NF EN 1990, tableau A1.3)

Pour une section de mur donnée, à un niveau donné (niveau de plancher), nous recherchons :

- la section des éventuelles armatures verticales de flexion composée qui vont équilibrer les combinaisons les plus défavorables de sollicitations internes résultant de ces chargements appliqués au bâtiment. Ces armatures seront disposées dans la hauteur d'étage de mur située au-dessus du plancher.
- les états de déformation et les diagrammes de béton comprimé correspondant à ces sollicitations

Point de départ : utilisation des résultats du calcul dynamique élastique du bâtiment (analyse modale spectrale)

Préalablement aux opérations de dimensionnement des ferraillements, Épicentre a déterminé la répartition des efforts et la distribution des contraintes **élastiques** au sein du bâtiment soumis aux actions sismiques, à partir d'un calcul par analyse modale spectrale avec utilisation d'un coefficient de comportement.

Comme préconisé par les règles, ce calcul est réalisé en utilisant pour la structure un modèle élastique et linéaire.

Les caractéristiques mécaniques des sections des murs en béton sont calculées à partir de leur coffrage, sans tenir compte des aciers mais en appliquant éventuellement les ajustements de calcul proposés par la commande « Options pour le calcul des caractéristiques des murs » du menu Description du projet (§ 5.11 du Manuel de l'utilisateur).

La fissuration des sections est prise en compte selon l'une des deux méthodes proposées par Épicentre : abattement forfaitaire de 50% de la rigidité élastique à la flexion, soit pour toutes les sections soit uniquement pour les sections tendues (voir les articles 5.19 du Manuel de l'utilisateur).

Rappelons les principales étapes d'un calcul par analyse modale spectrale (voir aussi le § 2.7 du présent document) :

- sélection des modes propres utiles
- choix des deux directions perpendiculaires de calcul
- détermination des coefficients sismiques et des chargements sismiques
- calcul des chargements statiques équivalents correspondant à chaque mode et à chacune des deux directions de calcul
- calculs statiques successifs du bâtiment soumis à chacun de ces chargements statiques équivalents
- pour chacune des deux directions de calcul, combinaison quadratique des valeurs obtenues, selon les dispositions de la clause 4.3.3.2(3)P de l'EC8-1 (combinaisons quadratiques complètes : CQC)
- combinaison des résultats des deux directions de calcul (séisme complet), selon les dispositions de la clause 4.3.3.5.1(3) de l'EC8-1 (combinaison de Newmark)

Il est vivement conseillé à l'utilisateur non familiarisé avec le calcul sismique par analyse modale spectrale de lire les fiches pédagogiques présentées dans le site Épicentre (www.logiciel-epicentre.com).

Sur ces bases, Épicentre calcule les diagrammes de contraintes normales d'origine sismique dans chaque section de mur et à chaque niveau de plancher.

Rappels sur les combinaisons de Newmark

Rappelons que l'expression « combinaison de Newmark » désigne les combinaisons de l'article 4.3.3.5 de l'EC8-1 (« Combinaison des effets des composantes de l'action sismique ») :

Combinaison de Newmark = $\max (DS_1 + 0.30 DS_2, 0.30 DS_1 + DS_2)$, DS_i représentant un résultat (effort, contrainte, déplacement) relatif à la direction sismique de calcul i .

D'un point de vue statistique, la combinaison de Newmark d'un résultat (effort, contrainte, déplacement, etc.) représente la valeur maximum théorique que ce résultat va présenter au cours du séisme.

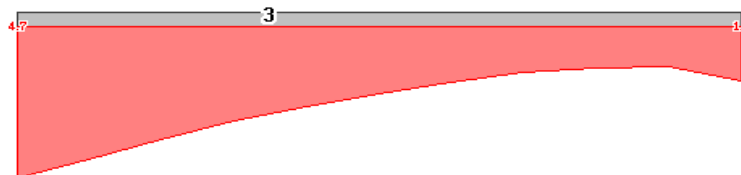
Les combinaisons de Newmark donnent toujours des résultats sans signe (c'est aussi le cas des résultats correspondant aux deux directions sismiques, issus de CQC).

Mais, le bâtiment réagissant aux séismes par un mouvement de balancement alterné, les résultats exprimés par des combinaisons de Newmark doivent être exploités avec les deux signes possibles.

Interprétation du diagramme de Newmark des contraintes normales élastiques d'un mur, issu du calcul sismique élastique

Ce diagramme est affiché à l'écran par la commande « Contraintes normales élastiques dans les murs... » du menu Calcul sismique.

Considérons un exemple de diagramme de Newmark de contraintes normales élastiques :

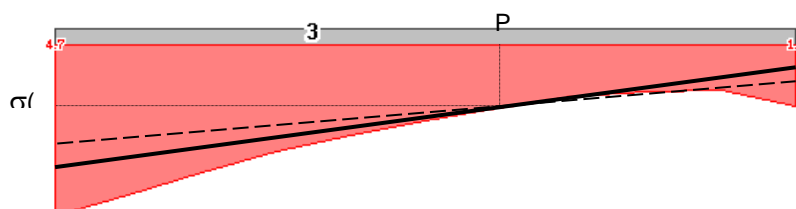


Il est essentiel de bien comprendre ce que représente ce diagramme :

- Il représente les valeurs maximum que les contraintes normales sont sensées atteindre pendant le séisme, en chaque point de la section du mur.
- Il constitue donc l'enveloppe des contraintes conventionnelles de calcul en chaque point de la section.
- Par conséquent, ce n'est pas un état global de contraintes agissant simultanément et à appliquer en bloc à la section pour représenter l'action sismique.

Si on note $\sigma(P)$ la valeur associée sur le diagramme de Newmark à un point P de la section, **$\sigma(P)$ représente donc la contrainte maximum qui risque d'être atteinte au point P en cours de séisme.**

Au moment précis où la contrainte en P atteindra la valeur $\sigma(P)$, l'état de contrainte global dans la section sera le diagramme de contraintes élastiques linéaire **tangent en P** au diagramme de Newmark (trait noir continu du dessin ci-dessous) :



En effet, le calcul par analyse modale spectrale considère qu'à chaque instant la déformée globale du bâtiment (considéré comme un modèle élastique linéaire) est la superposition des diverses déformées modales, excitées selon chacune des deux directions sismiques de calcul.

À chaque instant, le diagramme des contraintes normales dans une section donnée est donc un diagramme linéaire de contraintes, puisque issu de la superposition des diagrammes de contraintes élastiques linéaires associés à chaque mode propre.

Au moment où la contrainte en P atteint la valeur $\sigma(P)$, le diagramme linéaire de contraintes correspondant à l'état de contrainte de la section passera évidemment par le point $[P, \sigma(P)]$ du diagramme de Newmark.

Il sera par ailleurs forcément tangent à ce diagramme, car sinon les contraintes de certains points immédiatement voisins de P seraient supérieures à celles lues sur le diagramme de Newmark (diagramme en tireté de la figure ci-dessus), ce qui serait en contradiction avec la signification intrinsèque du diagramme de Newmark.

Diagrammes linéaires de calcul issus du diagramme de Newmark des contraintes normales d'une section

Considérons une section de mur, supposée pour le moment réduite à un panneau unique, et 11 points de calcul répartis régulièrement le long de cette section (on segmente la section en 10 tronçons égaux).

Épicentre va rechercher les 11 diagrammes linéaires tangents en ces 11 points au diagramme de Newmark des contraintes normales de la section.

Ces 11 diagrammes linéaires correspondent à 11 états de contraintes « maximum » susceptibles d'être atteints en cours de séisme, dans la section de mur.

Il est clair que ces 11 diagrammes linéaires, qui « enveloppent » le diagramme de Newmark de contraintes normales de la section, en constituent une très bonne approximation pour le dimensionnement de la section : Épicentre va donc les utiliser pour déterminer les éléments de ferrailage de la section.

Chargements élémentaires de dimensionnement de la section

Épicentre peut facilement calculer les torseurs (M_i , N_i) associés à chacun des 11 diagrammes de contraintes linéaires introduits dans le paragraphe précédent.

Le diagramme de Newmark étant sans signe (valeurs issues de combinaisons quadratiques), Épicentre considèrera aussi considérer les 11 torseurs « de signe inverse » des précédents.

Le dimensionnement du ferrailage de flexion composée de la section se fera donc à partir des sollicitations suivantes, écrites sous forme symbolique, qui combinent l'action sismique et la descente de charges :

+ (M_i , N_i) + (M, N) de DC(z+)

- (M_i , N_i) + (M, N) de DC(z+)

Dans ces expressions, (M, N) de DC(z+) représente le torseur de descente de charges **calculé juste au-dessus du plancher**. L'effet des charges apportées localement par le plancher sur le mur (appuis des dalles, des poutres, etc.) sera pris en compte un peu plus tard, dans le cadre de la vérification des zones comprimées.

Dans la suite de ce chapitre, ces sollicitations de calcul seront appelées « **chargements élémentaires de dimensionnement** » de la section. Notons que :

- la section va de ce fait être dimensionnée à partir de $2 \times 11 = 22$ chargements élémentaires de dimensionnement.
- en pratique, on constate qu'il arrive souvent qu'une partie des chargements (M_i , N_i) sont numériquement très proches, à quelques pour cent près. Pour accélérer les calculs, Épicentre élimine les chargements (M_i , N_i) proches à moins de 2 % près de chargements déjà retenus.
- ces chargements élémentaires de dimensionnement, dans un contexte de calcul sismique, sont les pendants exacts de ceux introduits dans le chapitre précédent, dans un contexte de calcul statique

Cette méthode pour déterminer les torseurs de calcul est mathématiquement équivalente à la « méthode de l'ellipsoïde » de Gupta

Cette méthode bien connue a été présentée par A. K. Gupta et M. P. Singh en 1977 (*Design of column sections subjected to three components of earthquake, Nuclear Engineering and Design*, p. 129-133). Elle est également décrite dans plusieurs ouvrages français (par exemple, *Calcul Dynamique des Structures en Zone sismique*, Alain Capra et Victor Davidovici, Eyrolles 1980, P. 65-72).

En résumé, si on s'intéresse à une section soumise à des efforts N, M_x et M_y d'origine sismique, les combinaisons (N, M_x , M_y) probables sont situées à l'intérieur d'un ellipsoïde inscrit dans un parallélépipède de côtés $2 N_{max}$, $2 M_{xmax}$, $2 M_{ymax}$. Les combinaisons d'efforts les plus défavorables sont bien entendu situées sur la surface de cet ellipsoïde.

Cette méthode est rigoureuse mais elle est difficile à mettre en œuvre, en particulier lorsqu'on s'intéresse à plus de 3 paramètres (par exemple : M_x , M_y , B, N).

Monsieur Laurent Guisset, gérant du bureau d'études SG INGÉNIERIE à Rivesaltes et utilisateur d'Épicentre, a démontré que cette méthode est mathématiquement équivalente à la méthode exacte de l'ellipsoïde (voir la démonstration ici : <https://www.logiciel-epicentre.com/doc/demonstration-laurent-guisset.pdf>).

Association des calculs de flexion et de vérification des zones comprimées

Épicentre a une très bonne connaissance géométrique et logique du bâtiment en cours de calcul et donc de l'environnement de la section de mur étudiée : hauteur libre des murs, nature des planchers adjacents, qualité de leurs encastres sur les murs (zéro, un ou deux planchers adjacents), présence de murs raidisseurs, existence de décalages en plan des axes des murs superposés, répartition des efforts de descente de charges, réactions d'appui au niveau des appuis de planchers et de poutres, etc.

En outre, Épicentre peut calculer de manière précise l'effet des chargements élémentaires de dimensionnement sur les sections de murs (méthode des 3 pivots avec diagrammes parabole-rectangle) et donc les diagrammes de déformation associés, notamment les diagrammes de béton comprimé.

En s'appuyant sur ces bases, Épicentre met en œuvre une série d'algorithmes sophistiqués qui associent étroitement les calculs de flexion composée et la vérification des zones de béton comprimé afin de rechercher, pour chaque plan de contreventement, un coefficient ϕ global de réduction de la résistance à la compression du béton, calculé au plus juste, qui permet d'optimiser les dimensionnements obtenus :

- Très souvent, l'intervention de ce coefficient ϕ global permet de justifier les sections à la flexion composée et au flambement des zones comprimées sans recourir à des armatures verticales de renfort vis-à-vis du flambement des zones comprimées, le surcroît d'armatures de flexion induit étant largement compensé par la suppression de ces armatures de renfort.
- Lorsque les armatures de verticales de renfort vis-à-vis du flambement des zones comprimées sont nécessaires, elles sont calculées au plus juste grâce à l'effet du coefficient ϕ global qui permet généralement une atténuation significative des problèmes de flambement rencontrés.

Les étapes de ce traitement sont présentées en détail dans les § 4.5 et 4.6 du chapitre précédent.

Détermination des armatures de flexion composée par itération à l'aide de la méthode des 3 pivots

Épicentre utilise ces chargements élémentaires de dimensionnement pour déterminer les armatures verticales de flexion composée de la section en appliquant la méthode de calcul itérative décrite dans le chapitre précédent.

Cette méthode itérative associe les calculs de flexion composée et les calculs de vérification des zones comprimées.

Elle s'appuie sur la méthode des 3 pivots en limitant la contrainte normale du béton à $\phi \cdot f_{cd}$.

f_{cd} est la valeur de calcul de la résistance à la compression du béton ($f_{cd} = \alpha_{cc} f_{ck} / \gamma_c$, avec $\alpha_{cc} = 1$ pour un calcul de type « mur armé » et 0,8 pour un calcul de type « mur non armé »).

ϕ est un coefficient global de réduction de la résistance à la compression du béton prenant en compte l'excentricité des charges et incluant les effets du second ordre ainsi que les effets normaux de fluage.

Comme dans le chapitre précédent ϕ est déterminé selon des principes qui s'inspirent à la fois de la clause 12.6.5.2 de l'EC2-1-1 (murs non armés) et de la clause 5.11(2)P du Guide d'application de l'EC2 (FD P18/717) de décembre 2013 (murs armés ou non armés).

Ce coefficient ϕ global calculé par Épicentre n'est pas le coefficient ϕ de la formule 12.11 de l'EC2-1-1, mais il en découle.

Le traitement mis en œuvre détermine simultanément les sections d'aciers A1 et A2 des éventuelles armatures longitudinales, situées aux deux extrémités de la section, ainsi que les longueurs L1 et L2 des potelets associés.

Les valeurs de A1 et A2 trouvées en fin d'itération peuvent éventuellement être nulles, même si certains des chargements élémentaires de dimensionnement appliqués mettent la section partiellement en traction : les diagrammes parabole-rectangle de béton comprimé associés à ces chargements élémentaires de dimensionnement suffisent dans ce cas à équilibrer les moments appliqués à la section, sans nécessité d'armatures de flexion.

Détermination des déformations de la section pour chaque chargement élémentaire de dimensionnement

Épicentre calcule ensuite l'état de déformation de la section correspondant à chaque chargement élémentaire de dimensionnement, en prenant en compte les valeurs A1, A2, L1 et L2 calculées précédemment.

Pour bien comprendre ce que signifie ce calcul, voir les commentaires du même paragraphe du § 4.4.

Calcul des diagrammes de béton comprimé correspondants

Puis, à partir de ces déformations, Épicentre détermine les diagrammes de béton comprimé associés aux chargements élémentaires de dimensionnement de la section.

Ce sont ces diagrammes de béton comprimé qui sont affichés par Épicentre dans les deux premiers modules de dessin du menu Vérification des murs, soit sous forme de diagramme enveloppe, soit sous forme détaillée (dans ce cas, les diagrammes de tous les chargements élémentaires de dimensionnement sont dessinés).

5.3. Vérification des zones de béton comprimé

Principes du calcul

Les vérifications au flambement des zones de béton comprimé sont conduites exactement comme dans le cas d'un calcul statique (voir le § 4.6 du chapitre précédent), à partir des chargements élémentaires de dimensionnement de chaque section de mur.

Le calcul est mené indépendamment pour chaque chargement élémentaire de dimensionnement appliqué à la section de mur, selon les dispositions des clauses 5.8.3.2(7) et 12.6.5 de l'EC2-1-1, complétées par les précisions apportées par la clause 5.11(2)P du Guide d'application de l'EC2 (FD P18/717) de décembre 2013.

La méthode itérative utilisée (voir les § 4.5 et 4.6) associe la justification de flexion composée et la vérification des zones comprimées, en faisant intervenir un coefficient ϕ de réduction de la résistance à la compression du béton prenant en compte l'excentricité des charges et incluant les effets du second ordre ainsi que les effets normaux de fluage.

Étapes du calcul

La vérification des zones comprimées est effectuée au-dessus et au-dessous du plancher, pour chaque chargement élémentaire de dimensionnement et en suivant les étapes suivantes (la description détaillée de ces étapes est faite au § 4.6) :

- Détermination des bandes de calcul relatives au chargement élémentaire en cours, au-dessus et au-dessous du plancher
- Calcul de l'effort normal appliqué à chaque bande (NEd)
- Calcul de l'effort normal résistant de chaque bande (NRd)
- Vérification au flambement de la bande de calcul et détermination éventuelle du nouveau coefficient de réduction ϕ de la section de mur.

Le traitement itératif est poursuivi tant que la section présente des problèmes de flambement tout en restant justifiée en flexion composée. La valeur de ϕ est recalculée à chaque itération comme étant la valeur mini des NRd/NEd obtenus pour l'ensemble des bandes vérifiées lors de l'itération (le traitement itératif est décrit en détail dans le § 4.5).

- Si en cours d'itérations il apparaît que le mur n'est plus justifié à la flexion composée tout en restant sujet au flambement, il faut procéder au calcul des armatures verticales de renfort nécessaires dans les hauteurs d'étage du mur au-dessus et/ou au-dessous du plancher, conformément aux formules présentées dans le § 4.6 et en utilisant la valeur du ϕ global atteinte (voir le détail de ce calcul à la fin du § 4.6).

Pourcentage mini et maxi des aciers verticaux de renfort

Épicentre applique la disposition de la clause 9.6.2 de l'EC2-1-1 et de ses annexes nationales (*) :

- $A_{s,vmin} = 0,002 A_c$ (si des armatures de renfort sont nécessaires dans la bande considérée)
- $A_{s,vmax} = 0,04 A_c$

(*) L'annexe nationale de mars 2007 prévoyait $A_{s,vmin} = 0,001 A_c (1 + 2 (NEd - NR_{d,12}) / (NR_{d,6} - NR_{d,12}))$, mais l'annexe nationale de mars 2016 a rétabli la valeur du tirage initial de l'EC2-1-1 ($A_{s,vmin} = 0,002 A_c$).

Présentation graphique des sections d'armatures trouvées

À l'issue de ces calculs effectués pour chacun des chargements élémentaires de dimensionnement de la section, Épicentre recherche dans chaque tronçon de 10 cm la valeur maximum de section d'acier trouvée : ces sections d'acier, ainsi calculées tous les 10 cm et exprimées en cm^2/ml , donnent le diagramme brut de calcul des armatures nécessaires à la résistance du béton comprimé (Épicentre présente ces diagrammes bruts de calcul en violet clair dans le module d'affichage dédié à la vérification du béton comprimé)

Dans un deuxième temps, Épicentre lisse ces valeurs par bandes de 1 ml pour synthétiser les résultats et les rendre plus facilement lisibles et exploitables : les diagrammes correspondants sont présentés à l'écran en violet foncé, en compagnie des précédents.

5.4. Armatures horizontales d'effort tranchant

Introduction de l'effort tranchant dans les chargements élémentaires de dimensionnement

Les chargements élémentaires de dimensionnement ont été introduits précédemment à partir de considérations liées aux diagrammes de contraintes normales élastiques issus de l'analyse modale spectrale.

Ils ne comprennent pas pour le moment d'efforts tranchants (seulement des efforts normaux et des moments, notés N_i et M_i au § 5.2, qui ont suffi à mener les calculs décrits dans les sections précédentes de ce chapitre).

En pratique, l'algorithme utilisé par Épicentre pour déterminer les 11 états de contraintes tangents au diagramme de Newmark des contraintes normales de la section en cours exprime chacun de ces 11 états de contraintes comme une combinaison des états de contraintes modaux en chacun des 11 points de calcul : la contribution de chaque mode est calculée en privilégiant les modes prépondérants au point de calcul considéré et en restant cohérent avec la formulation mathématique de la CQC.

Connaissant l'apport de chaque mode dans l'état de contrainte tangent associé à chacun des 11 points de calcul, il est ensuite facile de calculer l'effort tranchant associé à chacun de ces états de contrainte (c'est une combinaison des efforts tranchants modaux, sur la base des mêmes coefficients de contribution).

Chaque chargement élémentaire de dimensionnement peut donc se voir associer un effort tranchant T_i complétant les N_i et M_i introduits précédemment.

Vérification du cisaillement pour chaque chargement élémentaire

La vérification au cisaillement de la section, opérée pour chaque chargement élémentaire, est conduite comme dans le chapitre précédent (§ 4.7) et ne pose pas de problèmes particuliers :

- les valeurs de M_i , N_i et T_i sont connues
- les sections des éventuelles armatures de flexion composée tendues ou comprimées sont connues (section A1 ou A2 calculée précédemment) ainsi que la longueur et l'effort normal de la zone comprimée associée à chaque chargement élémentaire.
- en cas de mur non armé, si $\tau_{cp} \leq f_{c,vd}$ (clause 12.6.3 de l'EC2-1-1), il n'est pas nécessaire de prévoir des armatures horizontales d'effort tranchant.
- en cas de mur armé, si l'effort tranchant T est inférieur à l'effort tranchant résistant calculé selon les formules 6.2A et 6.2b de l'EC2-1-1, il n'est pas nécessaire de prévoir des armatures horizontales d'effort tranchant.
- dans le cas contraire, les formules 6.8 et 6.9 de l'EC2-1-1 permettent de calculer les éventuelles armatures horizontales d'effort tranchant associées au chargement considéré

Armatures minimales d'effort tranchant

Elles sont calculées selon les formules 9.4 et 9.5(N) de la clause 9.2.2.

À noter que la clause 5.4.3.5.2 de l'EC8-1 dispense de prévoir des armatures minimales d'effort tranchant en cas de calcul sous sollicitation sismique.

Bilan des sections d'armatures trouvées

On conserve les armatures horizontales maximum trouvées lors de ces calculs, effectués successivement pour l'ensemble des chargements élémentaires de dimensionnement.

5.5. Armatures de couture au droit des reprises de bétonnage

Vérification des surfaces de reprise pour chaque chargement élémentaire

La vérification de cisaillement le long des surfaces de reprise de bétonnage de la section, opérée pour chaque chargement élémentaire de dimensionnement, ne pose pas de problèmes particuliers :

- application des formules de la clause 6.2.4 de l'EC2-1-1 (on utilise les caractéristiques du diagramme du béton comprimé de chaque chargement élémentaire, déterminé précédemment lors des vérifications de flexion : longueur de la zone comprimée, effort normal de compression du béton et sections des éventuelles armatures de flexion)
- calcul des éventuelles armatures verticales nécessaires

Bilan des sections d'armatures trouvées

On cumule le long du plan de contreventement les armatures verticales trouvées et on les répartit le long du plan de contreventement.

Ce sont ces sections d'armatures qui sont affichées à l'écran par Épicentre (commande « Armatures verticales de couture au droit des reprises de bétonnage... » du menu Vérification des murs) :

Prise en compte des armatures verticales d'extrémités de mur pour la justification

La définition des zones critiques relatives aux murs est donnée dans la clause 5.4.3.5.3 (4) de l'Annexe nationale à l'EC8-1 de décembre 2013 (même texte que pour le 1er tirage de décembre 2007 de cette Annexe nationale) :

« En zone critique, c'est-à-dire au niveau le plus bas de chaque mur et sur une hauteur d'étage ainsi que pour le niveau situé au-dessus d'un retrait, de l'extrémité d'un mur par rapport à celle du mur sous-jacent, de plus de 1 mètre, les chaînages verticaux d'extrémité du mur sont portés à 4 HA 12 avec des cadres en diamètre 6 espacés au plus de 10 cm. »

Sections de murs non situées en zone critique

En dehors des zones critiques, conformément aux dispositions de la clause 6.2.5(1) de l'EC2-1-1 qui prévoit de prendre en compte l'« aire de la surface des armatures traversant l'interface, armatures d'effort tranchant comprises, le cas échéant, correctement ancrées de part et d'autre de l'interface », Épicentre prend en compte les éventuelles armatures verticales de flexion composée tendues ou comprimées et/ou les armatures des chaînages verticaux situés aux extrémités du plan de contreventement considéré.

Ces armatures verticales d'extrémité sont donc déduites de la section d'aciers de couture issue du calcul.

Sections de murs situées en zone critique

La clause 5.4.3.5.2(4) de l'Annexe nationale à l'EC8-1 de décembre 2013 demande de ne pas prendre en compte les armatures de flexion composée ou de chaînage vertical d'extrémité dans la justification des aciers de couture pour les sections de murs situées en zone critique.

Épicentre suit cette disposition, à condition que la prise en compte de l'annexe nationale ci-dessus soit demandée pour les traitements (commande « Prise en compte de l'évolution de la réglementation » du menu Description du bâtiment).

Les sections des murs en béton qui sont en zone critique sont entourées d'un trait bleu clair

Épicentre détermine automatiquement les zones critiques des murs de béton du projet : les parties de murs de béton situées en zone critique sont entourées d'un trait de contour bleu clair dans le module graphique relatif aux armatures de couture.

5.6. Sections complexes, changements de section, appuis entre murs, poutres-voiles

Sections complexes

Les raisonnements et résultats présentés précédemment pour les diverses catégories de ferrailage peuvent être généralisés aux sections de murs complexes (sections composées de plusieurs panneaux, telles des sections en forme de U, de L, de T, de E, etc.), comme cela a été expliqué en détail au paragraphe 4.9 du chapitre précédent, consacrée aux calculs statiques.

Changements de section, appuis entre murs

Ils peuvent également être appliqués au niveau des changements de section des murs ou au niveau des appuis entre murs, comme exposé au paragraphe 4.10.

Murs fonctionnant en poutres-voiles (poutres-cloisons)

Épicentre ne traite pas la partie suspendue des poutres-voiles. Il se contente de calculer les efforts dans les appuis situés de part et d'autre des parties suspendues.

Il vous appartient donc de déterminer vous-même le ferrailage des poutres-voiles, qui ne sont pas traitées en tant que telles par Épicentre, en raisonnant à partir des efforts donnés par Épicentre,.

Il vous faudra aussi penser à ferrailer les parties de mur en encorbellement, travaillant en console.

6. VÉRIFICATION DES MURS EN MAÇONNERIE APRÈS UN CALCUL STATIQUE OU DYNAMIQUE

Les chapitres précédents ont présenté en détail les méthodes de calcul mises en œuvre par Épicentre pour dimensionner les éléments de ferrailage des murs en béton dans le cas d'un calcul statique au vent ou d'un calcul sismique dynamique du bâtiment.

Le présent chapitre montre comment Épicentre réutilise exactement les mêmes principes de calcul pour vérifier les murs de maçonnerie en cas de calcul statique ou dynamique.

Les résultats des traitements présentés dans ce chapitre sont abondamment illustrés et commentés dans le chapitre 13 du Manuel de l'utilisateur (Modules graphiques de vérification des murs).

6.1. Introduction

Objectifs du module de vérification des murs en maçonnerie

Ce module a pour objet de donner des éléments chiffrés directement exploitables pour :

- vérifier le dimensionnement global d'un bâtiment lors de la phase d'avant-projet.
- préparer les plans d'exécution, avec notamment la section des armatures de chaînage.

Attention : Épicentre ne vérifie pas les portions de murs en maçonnerie en porte-à faux ou en encorbellement, comme les poutres-voiles en maçonnerie éventuellement renforcées en partie basse par une poutre en béton.

La vérification des consoles et poutres-voiles en maçonnerie est donc à réaliser entièrement par vous, sur la base des efforts de descente de charges et de contreventement fournis par Épicentre.

Conformité aux Eurocodes

Les calculs sont réalisés en stricte conformité avec les dispositions de l'EC6-1-1, de l'EC8-1 complétées (et parfois modifiées) par celles du nouveau DTU 20.1 de juillet 2020.

Le calcul des armatures verticales de flexion composée (chaînages verticaux) et des contraintes de la maçonnerie comprimée est mené selon les directives de l'EC6-1-1, avec application de la méthode des 3 pivots et détermination des déformations des sections à partir d'une loi de comportement de la maçonnerie de type parabole-rectangle.

Le présent chapitre s'intéressera successivement aux vérifications suivantes :

- vérification de flexion composée avec vérification des effets du second ordre dans les zones de maçonnerie comprimée
- vérification d'effort tranchant

Caractéristiques des matériaux

Les calculs utilisent les caractéristiques des types de maçonnerie et les caractéristiques des aciers associés aux maçonneries saisies dans le menu Description du projet :

- résistance caractéristique en compression (f_k) des divers types de maçonnerie du projet,
- section maximale des aciers des chaînages verticaux associée à chaque type de maçonnerie du projet,
- limite caractéristique d'élasticité des aciers de chaînage (f_{yk}).

Le module d'élasticité longitudinal de l'acier E_s est pris égal à 2 000 000 MPa.

Similitudes avec le dimensionnement du ferrailage des murs en béton

Les principes de calcul sont exactement les mêmes et seront donc réutilisés dans ce chapitre sans faire l'objet d'une présentation aussi détaillée que dans les deux chapitres précédents.

Il vous est donc fortement conseillé de lire les deux chapitres précédents avec attention avant d'entamer la lecture du présent chapitre.

6.2. Vérification de la flexion composée

Comme dans les chapitres 4 et 5 relatives aux murs en béton, nous raisonnerons d'abord sur une section composée d'un seul panneau rectiligne (mais avec éventuellement des épaisseurs variables...).

Chargements élémentaires de dimensionnement de la section

Les chargements élémentaires de dimensionnement sont déterminés exactement comme pour les murs en béton en combinant les torseurs (M_i , N_i) issus du calcul de contreventement (calcul statique au vent ou calcul sismique dynamique) avec les torseurs de descente de charges.

Dans un contexte de calcul sismique, les torseurs (M_i , N_i) issus du calcul de contreventement sont déterminés à partir du diagramme de Newmark des contraintes normales de la section (voir le § 5.2 du chapitre précédent)

Comme pour les murs en béton, les chargements élémentaires de dimensionnement peuvent s'exprimer sous la forme symbolique suivante :

Calcul statique :

- + (M_i , N_i) + (M, N) de DC_{\max} (z+)
- + (M_i , N_i) + (M, N) de DC_{\min} (z+)
- (M_i , N_i) + (M, N) de DC_{\max} (z-)
- (M_i , N_i) + (M, N) de DC_{\min} (z-)

Calcul sismique dynamique :

- + (M_i , N_i) + (M, N) de $DC(z+)$
- (M_i , N_i) + (M, N) de $DC(z-)$

Dans ces expressions, (M, N) de $DC(z+)$ représente le torseur de descente de charges **calculé juste au-dessus du plancher**. L'effet des charges apportées localement par le plancher sur le mur (appuis des dalles, des poutres porteuses, etc.) sera pris en compte par les algorithmes de vérification des zones comprimées.

Association des calculs de flexion et de vérification des zones comprimées

Épicentre a une très bonne connaissance géométrique et logique du bâtiment en cours de calcul et donc de l'environnement de la section de mur étudiée : hauteur libre des murs, nature des planchers adjacents, qualité de leurs encastres sur les murs (zéro, un ou deux planchers adjacents), présence de murs raidisseurs, existence de décalages en plan des axes des murs superposés, répartition des efforts de descente de charges, valeurs des charges apportées par les planchers, réactions d'appui au niveau des appuis de planchers et de poutres, etc.

En outre, Épicentre peut calculer de manière précise l'effet des chargements élémentaires de dimensionnement sur les sections de murs (méthode des 3 pivots avec diagrammes parabole-rectangle) et donc les diagrammes de béton comprimé.

En s'appuyant sur ces bases, Épicentre met en œuvre une série d'algorithmes sophistiqués qui associent étroitement les calculs de flexion composée et la vérification des zones de maçonnerie comprimée afin de rechercher, pour chaque plan de contreventement, un coefficient ϕ global de réduction de la résistance à la compression de la maçonnerie, calculé au plus juste, qui permet d'optimiser les dimensionnements obtenus.

Dans le cas des murs en maçonnerie, le traitement mis en œuvre permettra très souvent de justifier les plans de contreventement à la flexion composée et au flambement des zones comprimées avec un coefficient ϕ global calculé égal à 1, bien plus favorable que les valeurs forfaitaires de 0,6 ou 0,8 admises habituellement et utilisées par la version 17 d'Épicentre ou que les valeurs calculées à partir des formules de l'EC6-1-1 ou du DTU 20.1 sur la base des caractéristiques locales les plus défavorables de la section et sans découper la section en bandes de calcul.

Les étapes de ce traitement sont présentées en détail dans les § 4.5 et 4.6 du chapitre 5, dans le cas des murs en béton.

Nous allons voir ci-après les quelques adaptations apportées à ces étapes de traitement pour vérifier les murs en maçonnerie.

Détermination des armatures des chaînages verticaux par itération à l'aide de la méthode des 3 pivots

Comme pour les murs en béton, Épicentre utilise ces chargements élémentaires de dimensionnement pour déterminer les armatures verticales de flexion composée de la section (c'est-à-dire les sections *calculées* des chaînages verticaux) en appliquant la méthode de calcul itérative décrite dans le § 4.6 du chapitre 5.

Cette méthode itérative associe les calculs de flexion composée et les calculs de vérification des zones comprimées.

Elle s'appuie sur la méthode des 3 pivots en limitant la contrainte normale de la maçonnerie à $\phi.f_d$.

f_d est la valeur de calcul de la résistance à la compression de la maçonnerie.

ϕ est un coefficient global de réduction de la résistance à la compression de la maçonnerie prenant en compte l'excentricité des charges et incluant les effets du second ordre ainsi que les effets normaux de fluage.

Pour les murs en maçonnerie, ce ϕ global est déterminé selon les formules des § 7.4.3 et 7.5.1 du nouveau DTU 20.1.

Ce coefficient ϕ global calculé par Épicentre n'est pas le coefficient ϕ de la formule du § 7.5.1 du DTU 20.1, mais il en découle.

Le traitement mis en œuvre détermine simultanément les sections d'aciers calculées A1 et A2 des chaînages verticaux situés aux deux extrémités de la section.

Les sections calculées des chaînages verticaux A1 et A2 trouvées en fin d'itération peuvent éventuellement être nulles, même si certains des chargements élémentaires de dimensionnement appliqués mettent la section partiellement en traction : les diagrammes parabole-rectangle de maçonnerie comprimée associés à ces chargements élémentaires de dimensionnement suffisent dans ce cas à équilibrer les moments appliqués à la section, sans nécessité d'armatures de flexion.

Détermination des déformations de la section pour chaque chargement élémentaire de dimensionnement

Épicentre calcule ensuite l'état de déformation de la section correspondant à chaque chargement élémentaire de dimensionnement, en prenant en compte les valeurs A1 et A2 calculées précédemment,

Pour bien comprendre ce que signifie ce calcul, voir les commentaires du même paragraphe du § 4.4.

Calcul des diagrammes de maçonnerie comprimée correspondants

Puis, à partir de ces déformations, Épicentre détermine les diagrammes de maçonnerie comprimée associés aux chargements élémentaires de dimensionnement de la section.

Ce sont ces diagrammes de maçonnerie comprimée qui sont affichés par Épicentre dans les deux premiers modules de dessin du menu Vérification des murs, soit sous forme de diagramme enveloppe, soit sous forme détaillée (dans ce cas, les diagrammes de tous les chargements élémentaires de dimensionnement sont dessinés).

6.3. Vérification des zones de maçonnerie comprimée

Les formules utilisées pour la vérification au flambement des zones de maçonnerie comprimée sont celles du nouveau DTU 20.1 de 2020 et non celles de l'EC6-1-1 (section 6.1 et formules C3 et C4 de l'annexe informative C), jugées moins satisfaisantes par la commission de normalisation française.

Principes du calcul

Comme indiqué dans l'article précédent, Épicentre utilise sa bonne connaissance de l'environnement de la sections de murs en cours de traitement pour procéder à la vérification des zones de maçonnerie comprimée de chaque chargement élémentaire de dimensionnement de la section, **au-dessus et au-dessous du plancher**.

Le calcul est mené indépendamment pour chaque chargement élémentaire de dimensionnement appliqué à la section de mur considérée, selon les formules des § 7.4.3 et 7.5.1 du nouveau DTU 20.1.

En pratique, Épicentre procède à deux vérifications distinctes :

- **au-dessus du plancher** : la zone de maçonnerie comprimée correspondant à chaque chargement élémentaire de dimensionnement est découpée en bandes fictives adjacentes pour lesquelles on calcule NEd (Effort normal appliqué à la bande, cad la résultante des contraintes de la zone comprimée) et NRd (effort résistant de la bande, calculé à partir des caractéristiques du mur au-dessus du plancher). On vérifie alors si $N_{Ed} < N_{Rd}$.
- **au-dessous du plancher** : la vérification est faite selon les mêmes principes, mais avec les différences suivantes : (1) NEd comporte en plus les charges apportées *localement* par le plancher et les éventuels appuis de poutres et de murs ou de poteaux portés et (2) NRd doit être recalculé à partir des charges du plancher et des caractéristiques du mur au-dessous du plancher.

NB : pour la vérification au-dessous du plancher, le calcul de l'excentrement de premier ordre dans le cas des murs en maçonnerie prend en compte l'excentrement des charges apportées par le plancher, cet excentrement étant lui-même calculé à partir du moment fléchissant en tête du mur dû aux charges de plancher éventuelles des deux côtés du mur (formules du § 7.4.3 du DTU 20.1).

Détermination des bandes de calcul

La largeur des bandes de vérification associées à chaque chargement élémentaire de dimensionnement est déterminée comme pour les murs en béton (« on admet le plus souvent de limiter la largeur des bandes à la plus petite des deux valeurs : la moitié de la hauteur d'étage et les 2/3 de la longueur de la zone comprimée »).

NB : la largeur des bandes peut donc être différente au-dessus et au-dessous du plancher.

Comme pour les murs en béton, Épicentre prévoit de plus que la première bande (celle située du côté de l'extrémité la plus comprimée) doit avoir une largeur au moins égale à min (50 cm, $\frac{1}{2}$ longueur du mur). Cette disposition permet de rejeter une première bande trop étroite due à une zone comprimée très courte mais à contrainte élevée : considérer le flambement localisé d'une bande de 20 ou 30 cm de largeur n'a pas beaucoup de signification physique.

Calcul de l'effort normal appliqué à la bande de calcul

Épicentre calcule la résultante des contraintes normales de la zone comprimée du chargement élémentaire considéré sur l'emprise de la bande (intégration d'un tronçon du diagramme parabole-rectangle de la zone comprimée).

Pour la vérification au-dessous du plancher, il ajoute les charges apportées *localement* par le plancher et par les éventuels appuis de poutres et de murs ou de poteaux portés (Épicentre connaît ces charges, qu'il a calculées selon un pas de 10 cm lors du calcul de la descente de charges du bâtiment).

Calcul de l'effort normal résistant de la bande de calcul

Pour calculer l'effort normal résistant de la bande, Épicentre va calculer successivement l'effort normal résistant élémentaire de chaque tronçon de mur de 10 cm contenu dans la bande (il reprend la segmentation des murs selon un pas de 10 cm appliquée pour le calcul de descente de charges). L'effort normal résultant NRd de la bande sera le cumul de ces efforts résistants élémentaires.

En effet, le contexte de calcul peut varier le long du mur vérifié : épaisseur du mur, présence ou pas de planchers et de planelle isolante, position des murs raidisseurs éventuels, valeurs des charges apportées de chaque côté du plancher, etc.

Le calcul selon un pas de 10 cm permet de tenir compte de manière très précise de ces variations locales du contexte de calcul.

En pratique, Épicentre procède aux traitements suivants pour chaque tronçon de mur de 10 cm contenu dans la bande, au-dessus puis au-dessous du plancher :

- détermination de la hauteur effective h_{ef} du mur : Épicentre recherche les planchers hauts et bas en béton (contrairement au choix fait pour la vérification des murs en béton, les planchers en hourdis ou en dalles alvéolées précontraintes **seront considérés** comme des planchers en béton) situés de chaque côté du mur, afin de déterminer le degré d'encastrement en tête et en pied. Épicentre détecte également les raidisseurs éventuels (éléments de murs en retour) affectant le mur considéré, au-dessus ou au-dessous du plancher. La hauteur effective est calculée à partir de ces informations avec les formules du § 7.4.3 du DTU 20.1.

NB : dans la version 18, Épicentre ne prend en compte que les raidisseurs faisant partie du même mur que le panneau de mur considéré (murs à sections complexes à branches multiples du type L, U, E, etc.). Si, dans la modélisation, ces murs à sections complexes sont éclatés en panneaux séparés, ces panneaux ne joueront plus le rôle de raidisseurs pour les panneaux adjacents.

- Pour les vérifications au-dessous du plancher, calcul du moment fléchissant en tête du mur dû aux charges de plancher éventuelles des deux côtés du mur (formules du § 7.4.3 du DTU 20.1).
- Calcul de l'excentrement de premier ordre : $1/400$ de la hauteur efficace du mur + excentrement éventuel dû aux charges des planchers (voir ci-dessus) + décalage éventuel des axes des murs superposés.
- L'effort résistant de chaque tronçon de 10 cm est calculé à partir de ces éléments, selon la formule 12.10 de la clause 12.6.5.2 avec ϕ local calculé selon les formules du § 7.5.1 du DTU 20.1 :

$$\phi = A \times (1 - 2 e/t) \text{ avec } A = \min (1 ; 1,48 - 0,04 h_{ef} / t)$$

Vérification au flambement de la bande de calcul et détermination éventuelle du nouveau coefficient de réduction ϕ de la section de mur

La bande de calcul est considérée comme stable au flambement si $N_{Ed} < N_{Rd}$ (à vérifier au-dessus et au-dessous du plancher).

Comme indiqué précédemment dans le § 4.5, la vérification au flambement du mur considéré s'inscrit dans un traitement itératif associant la vérification de flexion composée et faisant intervenir le coefficient ϕ , coefficient global de réduction de la résistance à la compression du béton de la section de mur.

Ce traitement itératif est poursuivi tant que la section présente des problèmes de flambement tout en restant justifiée en flexion composée. La valeur de ϕ est recalculée à chaque itération comme étant la valeur mini des N_{Rd}/N_{Ed} obtenus pour l'ensemble des bandes vérifiées lors de l'itération (le traitement itératif est décrit en détail dans le § 4.5).

Fin du traitement itératif

Le traitement itératif est terminé lorsque l'un des trois situations suivantes est atteinte :

- Dès la première itération ($\phi = 1$), le mur n'est pas justifié en flexion composée : le mur est donc considéré comme sous-dimensionné en flexion composée.
- Pour la valeur de ϕ en cours (qui peut être $\phi = 1$ si on est dans la première itération), le mur est justifié en flexion composée et ne présente pas ou plus de problèmes de flambement des zones de maçonnerie comprimée. Dans ce cas, le mur est considéré comme valide avec la valeur de ϕ calculée.
- Pour une valeur de $\phi < 1$ (il y a donc eu plusieurs itérations), le mur n'est plus justifié en flexion composée et continue à présenter des problèmes de flambement des zones de maçonnerie comprimée. Dans ce cas, le mur est considéré comme sous-dimensionné au flambement des zones comprimées.

6.4. Vérification d'effort tranchant

Introduction de l'effort tranchant dans les chargements élémentaires de dimensionnement

Comme vu dans le cas des murs en béton (§ 4.7 et 5.4), chaque chargement élémentaire de dimensionnement peut se voir associer un effort tranchant T_i complétant les N_i et M_i introduits précédemment.

Vérification du cisaillement pour chaque chargement élémentaire

La vérification au cisaillement de la section, opérée pour chaque chargement élémentaire de dimensionnement, est conduite comme demandé dans l'article 7.5.4 du DTU 20.1, qui reprend les dispositions de l'EC6-1-1.

La *longueur comprimée* l_c prise en compte est soit la longueur effectivement comprimée (maçonnerie non chaînée), soit la longueur totale de la section (maçonnerie chaînée).

Les sections mises entièrement en traction par un de leurs chargements élémentaires de dimensionnement sont considérées comme sans résistance au cisaillement.

6.5. Sections complexes, changements de section, appuis entre murs, poutres-cloisons

Sections complexes

Les raisonnements et résultats présentés précédemment pour les différents types de vérification peuvent être généralisés aux sections de murs complexes (sections composées de plusieurs panneaux, telles des sections en forme de U, de L, de T, de E, etc.), comme cela a été expliqué en détail au paragraphe 4.9 du chapitre précédent, consacrée aux calculs statiques des murs en béton.

Changements de section, appuis entre murs

Ils peuvent également être appliqués au niveau des changements de section des murs ou au niveau des appuis entre murs, comme exposé au paragraphe 4.10.

Murs fonctionnant en poutres-cloisons

Épicentre ne traite pas la partie suspendue des poutres-cloisons. Il se contente de calculer les efforts dans les appuis situés de part et d'autre des parties suspendues.

Il vous appartiendra donc de déterminer vous-même le ferrailage des poutres-cloisons, qui ne sont pas traitées en tant que telles par Épicentre, en raisonnant à partir des efforts donnés par Épicentre.

Il vous faudra aussi penser à ferrailer les parties de mur en encorbellement, travaillant en console.

6.6. Flexion composée et flambement des zones comprimées : cas de la superposition de murs en matériaux différents (notamment maçonnerie sur béton)

Épicentre peut désormais traiter de manière rigoureuse le cas de la superposition de murs en matériaux différents.

En effet, nous avons vu précédemment que pour les vérifications de flexion composée et de flambement des zones comprimées, Épicentre utilise les mêmes types d'algorithmes pour les murs en béton et les murs en maçonnerie.

Nous avons vu aussi que, pour la vérification des zones comprimées, le logiciel considère à la fois les hauteurs de mur au-dessus et au-dessous du plancher.

En pratique, les algorithmes mis en œuvre par Épicentre sont construits pour traiter le cas où les matériaux ne sont pas les mêmes dans l'étage en cours (au-dessus du plancher) et dans l'étage inférieur.

Ils fonctionnent même si les matériaux sont de nature différente : par exemple, mur en maçonnerie sur mur en béton.

En cas de superposition de matériaux différents, les efforts internes dus à l'action de contreventement (calcul statique au vent ou calcul sismique dynamique) qui sollicitent la section-interface considérée (la section de contact) sont calculés en affectant à cette section la résistance à la compression du matériau le plus faible.

Les vérifications de flexion composée et de flambement des zones comprimées de la section-interface sont ensuite menées avec les algorithmes et les caractéristiques correspondant à chacun des matériaux impliqués : par exemple béton au-dessous du plancher et maçonnerie au-dessus.

7. CONFORMITÉ D'ÉPICENTRE AVEC LA MÉTHODE DE L'ELLIPSOÏDE POUR LA COMBINAISON DES EFFORTS INTERNES DES MURS

Le but de ce chapitre est de présenter la démonstration élaborée par Laurent Guisset, gérant du bureau d'études SG INGÉNIERIE à Rivesaltes et utilisateur d'Épicentre, pour montrer que la méthode utilisée par d'Épicentre pour combiner les efforts internes (M, N) issus du calcul sismique dynamiques est équivalente à la méthode de l'ellipsoïde décrite depuis longtemps dans la littérature technique relative aux calculs sismiques.

7.1. Combinaison des efforts internes issus de la superposition modale

Le calcul sismique par analyse modale spectrale fournit pour chaque section de mur la valeur maximale probable des efforts internes pendant le séisme de calcul (moments fléchissants, bimoment, effort normal, efforts tranchants).

Ces valeurs sont les combinaisons de Newmark des valeurs obtenues par superposition modale selon chacune des deux directions sismiques de calcul. Elles sont données sans signe, puisqu'elles sont issues de combinaisons quadratiques complètes.

Pour dimensionner le ferrailage des sections, il serait pessimiste de considérer que ces différents efforts atteignent leurs maximums en même temps. Il faut de plus résoudre la difficulté liée à l'absence de signe.

7.2. La méthode de l'ellipsoïde

Cette méthode bien connue a été présentée par A. K. Gupta et M. P. Singh en 1977 (*Design of column sections subjected to three components of earthquake, Nuclear Engineering and Design*, p. 129-133). Elle est également décrite dans plusieurs ouvrages français (par exemple, *Calcul Dynamique des Structures en Zone sismique*, Alain Capra et Victor Davidovici, Eyrolles 1980, P. 65-72).

En résumé, si on s'intéresse à une section soumise à des efforts N, Mx et My d'origine sismique, les combinaisons (N, Mx, My) probables sont situées à l'intérieur d'un ellipsoïde inscrit dans un parallélépipède de côtés $2 N_{max}$, $2 M_{xmax}$, $2 M_{ymax}$.

Les combinaisons d'efforts les plus défavorables sont bien entendu situées sur la surface de cet ellipsoïde. Cette méthode est rigoureuse mais elle est difficile à mettre en œuvre, en particulier lorsqu'on s'intéresse à plus de 3 paramètres (par exemple : Mx, My, B, N).

7.3. La méthode mise en œuvre par Épicentre est équivalente à la méthode de l'ellipsoïde

La méthode utilisée par ÉPICENTRE pour déterminer les combinaisons d'efforts internes de calcul est décrite au § 5.2 du présent document.

Elle est basée sur l'exploitation de points de tangence au diagramme de Newmark des contraintes normales de la section considérée.

Il se trouve que cette méthode est mathématiquement équivalente à la méthode exacte de l'ellipsoïde : la démonstration rigoureuse en a été apportée par Monsieur Laurent Guisset, gérant du bureau d'études SG INGÉNIERIE à Rivesaltes (et utilisateur d'Épicentre !).

7.4. La démonstration de Laurent Guisset

La démonstration de Laurent Guisset est à la fois très simple dans son principe et très impressionnante par les calculs qu'elle implique. Elle consiste à établir l'expression mathématique des efforts N et M retenus par ÉPICENTRE, puis à vérifier qu'ils sont sur l'ellipse de Gupta et Singh. L'auteur du logiciel ÉPICENTRE félicite chaleureusement Laurent Guisset et le remercie de l'avoir autorisé à diffuser le détail de sa démonstration, qui est présenté ci-après.

Méthode de combinaison modale pour deux paramètres à partir des contraintes normales en combinaison quadratique complète (CQC)

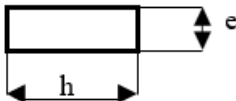
Objet : Les deux paramètres sont le moment fléchissant et l'effort normal pour le calcul des armatures longitudinales d'une section rectangulaire en béton armé.

Principe de la méthode : à partir des contraintes normales linéaires modales, on calcule la contrainte normale issue de la CQC des précédentes en tout point de la section ; puis on détermine la droite tangente à la courbe obtenue au point considéré avant d'obtenir le couple « probable » par intégration.

Nous allons démontrer que cette méthode est équivalente à la méthode générale qui passe par la détermination d'une ellipse d'équation : $(N/\bar{N})^2 + (M/\bar{M})^2 - 2\rho(NM/\bar{N}\bar{M}) = 1 - \rho^2$

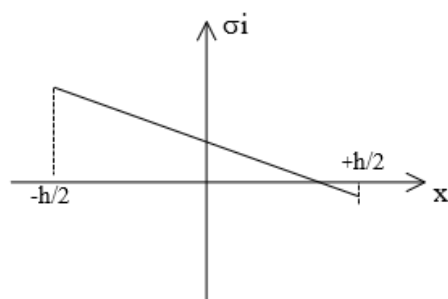
Démonstration :

Notations :

- N_i et M_i = effort normal et moment fléchissant (pris avec leur signe) pour le mode i .
- Section BA : 
- $\bar{N} = \sqrt{(\sum_i \sum_j \beta_{ij} N_i N_j)}$: CQC des efforts normaux
- $\bar{M} = \sqrt{(\sum_i \sum_j \beta_{ij} M_i M_j)}$: CQC des moments fléchissants
- $\rho = (\sum_i \sum_j \beta_{ij} M_i N_j) / (\bar{M} \bar{N})$: coefficient de corrélation entre les deux paramètres
- σ_i : contrainte normale linéaire pour le mode i
- σ : contrainte normale CQC
- σ_T : contrainte tangente à σ ; variable $= x_T$
- N et M : couple probable recherché

Équation des contraintes normales modales :

On suppose le repère centré sur le centre de gravité de la section



$$\sigma_i(x) = N_i/S + M_i x / I$$

avec $S = eh$ (aire)

$$I = (eh^3)/12 \text{ (inertie)}$$

$$\text{soit } \sigma_i(x) = (N_i/eh) + (12 M_i x / (eh^3))$$

Equation de la contrainte CQC :

$$\begin{aligned}
 \sigma(x) &= \sqrt{(\sum_i \sum_j \beta_{ij} \sigma_i \sigma_j)} \\
 &= \sqrt{\{\sum_i \sum_j \beta_{ij} [N_i/eh + 12 M_i x / (eh^3)] \cdot [N_j/eh + 12 M_j x / (eh^3)]\}} \\
 &= \sqrt{\{\sum_i \sum_j \beta_{ij} [(144 M_i M_j x^2 / (e^2 h^6)) + (N_i N_j / e^2 h^2) + (12 M_i N_j x / (e^2 h^4)) + (12 M_j N_i x / (e^2 h^4))]\}} \\
 &= \sqrt{\{\sum_i \sum_j \beta_{ij} [(144 M_i M_j x^2 / (e^2 h^6)) + (N_i N_j / e^2 h^2) + (24 M_i N_j x / (e^2 h^4))]\}} \\
 &= \sqrt{\{[144 \bar{M}^2 x^2 / (e^2 h^6)] + [\bar{N}^2 / e^2 h^2] + [24 \rho \bar{M} \bar{N} x / (e^2 h^4)]\}}
 \end{aligned}$$

Posons: $A = 144 \bar{M}^2 / (e^2 h^6)$

$B = 24 \rho \bar{M} \bar{N} / (e^2 h^4)$

$C = \bar{N}^2 / e^2 h^2$

On a donc: $\sigma(x) = \sqrt{Ax^2 + Bx + C}$

Equation de la contrainte tangente σ_T , tangente au point d'abscisse x :

$\sigma_T(x_T) = \sigma'(x)(x_T - x) + \sigma(x)$

avec $\sigma'(x) = (2Ax + B) / [2\sqrt{Ax^2 + Bx + C}]$

soit $\sigma_T(x_T) = [(2Ax + B)(x_T - x) / (2\sqrt{Ax^2 + Bx + C})] + [\sqrt{Ax^2 + Bx + C}]$

Couple probable N et M :

On les obtient par intégration de σ_T

$$N = \int_{-h/2}^{+h/2} (e^{\sigma_T(x_T)} dx_T) = e^{\int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_T(x_T) dx_T)}$$

$$N = e^{\int_{-h/2}^{+h/2} \{[(2Ax + B)(x_T - x) / (2\sqrt{Ax^2 + Bx + C})] + [\sqrt{Ax^2 + Bx + C}]\} dx_T}$$

$$N = e^{\{[(2Ax + B) \left[\frac{(x_T^2/2) - (x x_T)}{-h/2} \right] / (2\sqrt{Ax^2 + Bx + C})] + [\sqrt{Ax^2 + Bx + C} \left[\frac{(x_T)}{-h/2} \right]] \}_{-h/2}^{+h/2}}$$

$$N = e^{\{[(2Ax + B)(-xh) / (2\sqrt{Ax^2 + Bx + C})] + [(h) \sqrt{Ax^2 + Bx + C}]\}}$$

$$N = eh[-x(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C)] / (2\sqrt{Ax^2 + Bx + C})$$

$$N = eh(Bx + 2C) / (2\sqrt{Ax^2 + Bx + C})$$

$$M = \int_{-h/2}^{+h/2} (e \sigma_T(x_T) x_T dx_T) = e \int_{-h/2}^{+h/2} (\sigma_T(x_T) x_T dx_T)$$

$$M = e \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\left[\frac{(2Ax + B)(x_T^2 - x x_T)}{2 \sqrt{Ax^2 + Bx + C}} \right] + \left[x_T \sqrt{Ax^2 + Bx + C} \right] dx_T \right)$$

$$M = e \left\{ \left[\frac{(2Ax + B) \left[\frac{x_T^3}{3} - (x x_T^2/2) \right]}{2 \sqrt{Ax^2 + Bx + C}} \right] + \left[\sqrt{Ax^2 + Bx + C} \left[\frac{x_T^2}{2} \right] \right] \right\}_{-h/2}^{+h/2}$$

$$M = e [(2Ax + B) h^3 / (24 \sqrt{Ax^2 + Bx + C})]$$

$$M = e h^3 [(2Ax + B) / (24 \sqrt{Ax^2 + Bx + C})]$$

Vérification de l'équation du couple (M,N) :

On remplace A, B et C par leur expression, tout en élevant au carré N et M.

$$N^2 = \frac{e^2 h^2 (Bx + 2C)^2}{4(Ax^2 + Bx + C)} = \frac{e^2 h^2 (B^2 x^2 + 4C^2 + 4BCx)}{4(Ax^2 + Bx + C)}$$

$$N^2 = \frac{e^2 h^2 \left(\frac{576 \rho^2 \bar{M}^2 \bar{N}^2 x^2}{e^4 h^8} + \frac{96 \rho \bar{M} \bar{N}^3 x}{e^4 h^6} + \frac{4 \bar{N}^4}{e^4 h^4} \right)}{4 \left(\frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2} \right)}$$

$$N^2 = \frac{\frac{144 \rho^2 \bar{M}^2 \bar{N}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N}^3 x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^4}{e^2 h^2}}{\frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2}}$$

$$M^2 = \frac{e^2 h^6 (2Ax + B)^2}{576 (Ax^2 + Bx + C)} = \frac{e^2 h^6 (4A^2 x^2 + 4AB x + B^2)}{576 (Ax^2 + Bx + C)}$$

$$M^2 = \frac{e^2 h^6 \left(\frac{82944 \bar{M}^4 x^2}{e^4 h^{12}} + \frac{13824 \rho \bar{M}^3 \bar{N} x}{e^4 h^{10}} + \frac{576 \rho^2 \bar{N}^2 \bar{M}^2}{e^4 h^8} \right)}{576 \left(\frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2} \right)}$$

$$M^2 = \frac{\frac{144 \bar{M}^4 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M}^3 \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\rho^2 \bar{M}^2 \bar{N}^2}{e^2 h^2}}{\frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2}}$$

$$MN = \frac{e^2 h^4 (Bx + 2C) (2Ax + B)}{48 (Ax^2 + Bx + C)} = \frac{e^2 h^4 (2AB x^2 + B^2 x + 4AC x + 2BC)}{48 (Ax^2 + Bx + C)}$$

$$MN = \frac{48 \left(\frac{144 \rho \bar{M}^3 \bar{N} x^2}{e^2 h^6} + \frac{12 \rho^2 \bar{M}^2 \bar{N}^2 x}{e^2 h^4} + \frac{12 \bar{M}^2 \bar{N}^2 x}{e^2 h^4} + \frac{\rho \bar{M} \bar{N}^3}{e^2 h^2} \right)}{48 \left(\frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2} \right)}$$

$$\begin{aligned}
 MN = & \frac{\frac{144 \rho \bar{M}^3 \bar{N} x^2}{e^2 h^6} + \frac{12 \rho^2 \bar{M}^2 \bar{N}^2 x}{e^2 h^4} + \frac{12 \bar{M}^2 \bar{N}^2 x}{e^2 h^4} + \frac{\rho \bar{M} \bar{N}^3}{e^2 h^2}}{\frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2}} \\
 (M / \bar{M})^2 + (N / \bar{N})^2 - 2\rho (NM / \bar{N} \bar{M}) = & \frac{\frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^4 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\rho^2 \bar{N}^2}{e^2 h^2}}{\frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2}} \\
 + & \frac{\frac{144 \rho^2 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2}}{\frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2}} \\
 -2\rho & \frac{(\frac{144 \rho \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{12 \rho^2 \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} - \frac{12 \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4}) e^2 h^6 + \frac{\rho \bar{N}^2}{e^2 h^2}}{\frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \frac{\frac{\rho^2 \bar{N}^2}{e^2 h^2} + \frac{144 \rho^2 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} - \frac{288 \rho^2 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} - \frac{24 \rho^3 \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4}}{\frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2} - \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} - \frac{2 \rho^2 \bar{N}^2}{e^2 h^2}} \\
 &+ \frac{\frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2}}{\left(\frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2} + \frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} \right)} \\
 &= 1 - \rho^2 \frac{\frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} + \frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2}}{\left(\frac{\bar{N}^2}{e^2 h^2} + \frac{144 \bar{M}^2 x^2}{e^2 h^6} + \frac{24 \rho \bar{M} \bar{N} x}{e^2 h^4} \right)} \\
 &= 1 - \rho^2
 \end{aligned}$$

Soit $(M / \bar{M})^2 + (N / \bar{N})^2 - 2\rho (NM / \bar{N} \bar{M}) = 1 - \rho^2$ (Equation de l'ellipse)

Conclusion : les deux méthodes sont donc mathématiquement équivalentes

Laurent GUISET
Bureau d'études SG Ingénierie
Rivesaltes